ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Begründet von W. SÜSS

Herausgegeben in Verbindung mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach

von R. BAER · H. KNESER

INHALT – CONTENTS – SOMMAIRE

H.	VOL. XI	FASC. 1	PAG. 1–76	1. II. 1960

AUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES OF MATHEMATICS — ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Adresse der Redaktion: Würzburg (Deutschland), Klinikstraße 6

Das *Archiv der Mathematik* erscheint regelmäßig alle 2 Monate mit jährlich 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt für den ganzen Band Fr. 66.— (DM 66.—) und für das Einzelheft Fr. 14.— (DM 14.—). Mitglieder einer der nachstehend genannten Gesellschaften erhalten hierauf 20% Rabatt: *Canadian Mathematical Congress* · *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* · *Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik* · *Het Wiskundig Genootshap te Amsterdam* · *Indian Mathematical Society* · *Matematisk Forening i Kobenhavn* · *Norsk Matematisk Forening* · *Österreichische Mathematische Gesellschaft* · *Polskie Towarystwo Matematyczne* · *Schweizerische Mathematische Gesellschaft* · *Sociedad Matemática Española* · *Société Mathématique de France* · *The American Mathematical Society* · *The Edinburgh Mathematical Society* · *The London Mathematical Society* · *The Mathematical Association of America* · *Unión Matematica Argentina* · *Unione Matematica Italiana.*

Veröffentlicht werden in erster Linie *Originalarbeiten* aus dem Gesamtgebiet der *Mathematik* und ihrer unmittelbaren Anwendungen. In beschränktem Maße können auch *Selbstreferate* über bislang unveröffentlichte größere Arbeiten, deren wissenschaftliche Bedeutung dies gerechtfertigt erscheinen läßt, Aufnahme finden. In diesen Selbstreferaten müssen außer den Resultaten die wesentlichen Schritte der Beweisführung mitgeteilt werden. Schließlich gelangen in zwangloser Folge *Zusammenfassende Berichte* über die Fortschritte einzelner Sondergebiete, die in rascher Entwicklung begriffen sind, mit ausführlichen Literaturangaben zum Abdruck.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache abgefaßt sein und sollen an Umfang 10 Druckseiten nicht überschreiten. Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln einzureichen und ihnen separat eine «Anweisung für den Setzer» beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz, Kleindruck und griechische, Fraktur-, Antiqua- und sonstige Typen durch farbige Unterstreichungen kenntlich gemacht sind. Die Vorlagen für Abbildungen müssen reproduktionsfertig und mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden. Beschriftung der Abbildung jedoch nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier. Nicht durch die Druckerei verschuldete Autorkorrekturen, welche 10% der reinen Satzkosten übersteigen, werden den betreffenden Autoren belastet.

Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht. Den Verfassern werden 75 Separata ohne Umschlag gratis überlassen; weitere Fortdrucke bzw. Umschläge für Separata, sofern ihre Bestellung bei Rückgabe der Korrektur aufgegeben wird, können gegen folgende Berechnung geliefert werden: Je 25 Fortdrucke DM 0,80 pro Seite (ohne Umschlag); erste 25 Umschläge DM 18.—, je weitere 25 Umschläge DM 6.—.

Redaktionsschluß spätestens 3 Monate vor Erscheinungstermin des jeweiligen Heftes. Sämtliche *Zuschriften* sind an die obengenannte Adresse der Redaktion erbeten.

Gesamtherstellung: Konrad Triltsch, Graphischer Großbetrieb, Würzburg

Die Auslieferung dieser Zeitschrift erfolgt für Deutschland durch den Birkhäuser Verlag, Stuttgart, Olgastraße 53, und für alle übrigen Staaten durch den Birkhäuser Verlag in Basel.

On Pure Subgroups of Abelian Groups

By J.-M. MARANDA in Zürich

1. Introduction. In [6], J. Łoś has proved that any abelian group may be embedded as a pure subgroup in an abelian group of class $\boldsymbol{D}$, i.e. an abelian group which is a direct summand of any abelian group of which it is a pure subgroup, and has characterized the groups of class $\boldsymbol{D}$ as the direct summands of direct products of cyclic groups of prime power order and of Prüfer groups. He notices the similarity of this result and the embedding of any abelian group in an injective or divisible abelian group. It is the object of this paper to push this similarity still further and even to show that one is dealing with two extreme cases of one general theory. So as not to make our introduction too long, we describe our results for the ordinary notion of purity.

In section 2, we rederive these results of Łoś in a somewhat different manner, thereby exhibiting a characterization of pure extensions which is dual to their well-known characterization as cyclically trivial extensions, and we characterize the groups of class $\boldsymbol{D}$ by a property analogous to injectivity (We will refer to these groups as pure-injective groups). Dual statements are also proved, the pure-projective groups being just the direct sums of cyclic groups.

In section 3, a notion of pure-essential extension is introduced which is similar to the ordinary notion of essential extension [4], and it is proved that any abelian group A possesses a maximal pure-essential extension B which is pure-injective and unique up to equivalence.

Sections 3, 4 and 5 are devoted to proving that B may be constructed as a certain completion of A in the topology $T(A)$ of A in which $\{nA \mid n \neq 0\}$ is a basis of the filter of neighborhoods of 0. The pure-injective groups are then characterized as those groups A for which the closure of 0 in $\{A, T(A)\}$ is divisible and for which $\{A, T(A)\}$ is complete. This generalizes Theorem 23 of [5]. We also reobtain a result of BALCERZYK [1] which states that a group is pure-injective if and only if it is algebraically compact.

2. Pure-projective and pure-injective modules. Let R be a principal ideal domain with 1-element. We consider the category of all unitary left R-modules $A, B, C, \ldots$ (hereafter referred to simply as modules) and all their R-homomorphisms $f, g, h, \ldots$ (referred to as homomorphisms). Let S be a set of primes of R, associated primes being considered as equal, and let S^* denote the set of all non-null elements of R whose prime divisors are all in S. On the class of modules we consider the relation "A is an S-pure submodule of B", which we write $A \gamma_S B$ and which one defines as follows: $A \subseteq B$ and if $a \in A$ and $m \in S^*$, then $a = mb$, where $b \in B$, implies that $a = ma'$ for some $a' \in A$. It is well-known that this is equivalent to saying that if $a \in A$, $p \in S$

and n is any natural integer, then $a = p^n b$, where $b \in B$, implies that $a = p^n a'$ for some $a' \in A$. We notice that if S is void, then $A \gamma_S B$ just means that A is a submodule of B; if S is the set of all primes of R, then $A \gamma_S B$ just means that A is a pure submodule of B in the ordinary sense and that in general, if $S \subseteqq S'$, then $A \gamma_{S'} B$ implies $A \gamma_S B$. If S contains only one prime p, then in all notation involving S, we replace S by p. A module will be called S-cyclic if its order ideal is 0 or is generated by some element in S^*. The following lemma is an obvious generalization of a well-known characterization of pure extensions as cyclically trivial extensions.

Lemma 1. *If f is a homomorphism from B onto A, then $\ker f \gamma_S B$ if and only if for any homomorphism g from an S-cyclic module Ra into A there exists a homomorphism h from Ra into B such that $g = fh$.*

Definition 1. *We will say that a module A is γ_S-projective if for any homomorphism f from B onto C such that $\ker f \gamma_S B$, if g is a homomorphism from A into C, then there exists a homomorphism h from A into B such that $g = fh$.*

It is obvious that $S \subseteqq S'$ implies that any γ_S-projective module is also $\gamma_{S'}$-projective. If S is void, then the γ_S-projective modules are just the ordinary projective modules. Also, any isomorphic image of a γ_S-projective module is γ_S-projective and a direct sum of modules is γ_S-projective if and only if all its summands are γ_S-projective.

Theorem 1. *If A is any module, then there exists a homomorphism f from a direct sum B of S-cyclic modules onto A such that $\ker f \gamma_S B$.*

Proof. Let a be any element of A. If the order ideal of a is generated by an element in S^*, let A_a denote the cyclic submodule of A generated by a and let f_a denote the injection of A_a into A. If the order ideal of a is not generated by some element of S^*, let A_a be R, considered as a left R-module, and let f_a denote the homomorphism $x \to xa$ from R into A. Then, if B is the direct sum of the A_a, there exists a homomorphism f from B into A whose restriction to each A_a is f_a. Since A is generated by the $f_a(A_a)$, f is a homomorphism from B onto A. By Lemma 1, $\ker f \gamma_S B$.

Theorem 2. *The following conditions on a module A are equivalent:*

1) *A is γ_S-projective.*
2) *If f is a homomorphism from B onto A and if $\ker f \gamma_S B$, then there exists a homomorphism g from A into B such that fg is the identity on A ($\ker f$ is a direct summand of B).*
3) *A is a direct summand of a direct sum of S-cyclic modules.*

Proof. That 1) implies 2) is obvious. Assume that 2) holds. By Theorem 1, there exists a homomorphism f from a direct sum of S-cyclic modules B onto A such that $\ker f \gamma_S B$, and by 2), A is a direct summand of B. Finally, assume that 3) holds and let us prove that A is γ_S-projective. Since a direct sum of modules is γ_S-projective if and only if each summand is γ_S-projective, we see that we may assume that A is S-cyclic, and then the conclusion follows from Lemma 1.

It is well-known that any submodule of a direct sum of cyclic modules is also a direct sum of cyclic modules. If one looks over the proof of this theorem, one easily sees that any submodule of a direct sum of S-cyclic modules is also a direct sum of

S-cyclic modules so that by Theorem 2, a module is γ_S-projective if and only if it is a direct sum of S-cyclic modules.

We now proceed to construct a dual to the theory we have just seen. By a module of type p^n, where p is a prime of R and $n = 1, 2, \ldots, \infty$, we mean a cyclic module of order p^n when n is finite and the Prüfer module determined by p when n is infinite. We start by noticing that a module A is cyclic with generator a if and only if, given any homomorphism f into A, $a \in \operatorname{im} f$ implies that f is an epimorphism. Dually, a module A is of type p^n with generator a for its cyclic submodule of prime order if and only if, given any homomorphism f defined on A, $f(a) \neq 0$ implies that f is a monomorphism. Also, given any module A and any $a \in A$, there is a cyclic submodule of A generated by a, and dually, if $a \neq 0$, there is a homomorphism f defined on A whose image is of type p^n with cyclic submodule of prime order generated by $f(a)$; f may be defined as the natural homomorphism from A onto A/C, where C is a submodule of A maximal with respect to the property of not containing a. We will call a module S-cocyclic if it is of type p^∞, p arbitrary, or of type p^n, where n is finite and $p \in S$. A characterization of purity wich is dual to Lemma 1 is given by the following lemma.

Lemma 2. *If f is an injection from A into B, then $A \gamma_S B$ if and only if for any homomorphism g from A into an S-cocyclic module C, there exists a homomorphism h from B into C such that $g = hf$ (i.e. h is an extension of g).*

Proof. Let C be of type p^n and assume first of all that $A \gamma_S B$. If $n = \infty$, then C is divisible and there is nothing to prove. The other case is where n is finite and $p \in S$. We may obviously assume that g is a nonnull homomorphism from A onto C. Since $p^n A \subseteq \ker g$ and since, A being S-pure in B, $p^n B \cap A = p^n A$, we have that $(p^n B + \ker g) \cap A = \ker g$. Now let $a \in A$ be such that $g(a)$ is of order p. Then, $\ker g$ is a submodule of A which is maximal with respect to the property of not containing a so that $a \notin p^n B + \ker g$. Let D be a submodule of B which is maximal with respect to the properties of containing $p^n B + \ker g$ and not containing a. Then the natural homomorphism h from B onto B/D may be considered as an extension of g and B/D is of type p^m, where $m \geqq n$. But since $p^n B \subseteq D$, $m = n$ so that $h(B) = C$.

Conversely, assume that the condition of the lemma holds and let $p^n b = a \in A$, where $b \in B$ and $p \in S$. We must show that $a \in p^n A$. Assume that $a \notin p^n A$ and let D be a submodule of A which is maximal with respect to the properties of containing $p^n A$ and not containing a. Then A/D is of type p^m, where $m \leqq n$ and the natural homomorphism g from A onto A/D is extendable to a homomorphism h from B onto A/D. But since $p^n b = a$, A/D is at least of type p^{n+1}, a contradiction.

Definition 2. *We will say that a module A is γ_S-injective if whenever $B \gamma_S C$ and f is a homomorphism from B into A, then f is extendable to a homomorphism from C into A.*

We notice that if S is void, then the γ_S-injective modules are just the injective modules. Clearly $S \subseteq S'$ implies that any γ_S-injective module is also $\gamma_{S'}$-injective. Also, any isomorphic image of a γ_S-injective module is also γ_S-injective and a direct product of modules is γ_S-injective if and only if all its factors are γ_S-injective.

Theorem 3. *If A is any module, then there exists a direct product B of S-cocyclic modules such that $A \gamma_S B$.*

Proof. Let $\{f_i \mid i \in I\}$ be the set of all natural homomorphisms defined on A whose kernels are submodules of A which are maximal with respect to the property of not containing some non-null element of A. Then, $f_i(A)$ is of type $p_i^{n_i}$. If p_i is in S, set $B_i = f_i(A)$ and if $p_i \notin S$, set B_i to be a module of type p^∞ and consider f_i as a homomorphism from A into B_i. Then, if B is the direct product of the B_i, there exists a homomorphism f from A into B such that for each $i \in I$, $f_i = g_i f$, where g_i is the canonical projection of B onto $f_i(A)$. Since the intersection of all the ker f_i is 0, f is an isomorphism. Then, by Lemma 2, $f(A) \gamma_S B$.

Theorem 4. *The following conditions on a module A are equivalent:*

1) *A is γ_S-injective.*
2) *A is a direct summand of every module of which it is an S-pure submodule.*
3) *A is a direct summand of a direct product of S-cocyclic modules.*

Proof. That 1) implies 2) is obvious. Assume that 2) holds. By Theorem 3, there exists a direct product B of S-cocyclic modules such that $A \gamma_S B$ and by 2), A is a direct summand of B. Finally, assume that 3) holds and let us prove that A is γ_S-injective. Since a direct product of modules is γ_S-injective if and only if each factor is γ_S-injective, we see that we may assume that A is S-cocyclic and then the conclusion follows from Lemma 2.

We now remark that if we use the characterization of purity given by Lemma 1 to define purity in the general case where R is an arbitrary ring with unity element, then Theorems 1 and 2 remain valid. It is evident that one need not restrict oneself to the class of all cyclic modules in this definition but that one may use just certain types of cyclic modules or even more generally, any arbitrary class of modules with suitable properties. Dually, if one uses the characterization of purity given by Lemma 2 to define purity in the general case, a module A being cocyclic if it contains a non-null element a such that $B \subseteqq A$ and $a \notin B$ imply $B = 0$, then Theorems 3 and 4 remain valid. Again, one need not restrict oneself to the class of all cocyclic modules but one may use only certain types of cocyclic modules (in this connection we notice that the cocyclic modules are just the essential extensions of simple modules, the generalization of Prüfer modules being just the maximal essential extensions of simple modules) or even more generally, any suitable class of modules. Thus it appears that there is not only one, but two dual types of generalizations of the notion of pure extension of a module.

3. Pure-essential extensions. We begin this section with a list of elementary properties of S-purity which are obvious generalizations of well-known properties of the ordinary concept of purity.

P 1. *$A \gamma_S B$ and $B \gamma_S C$ imply $A \gamma_S C$.*

P 2. *$A \subseteqq B \subseteqq C$ and $A \gamma_S C$ imply $A \gamma_S B$.*

P 3. *If f is a homomorphism defined on A, if ker $f \subseteqq B$ and if $B \gamma_S A$, then $f(B) \gamma_S f(A)$.*

P 4. *If f is a homomorphism defined on A, if $\ker f \gamma_S A$ and if $B \gamma_S f(A)$, then*

$$f^{-1}(B) \gamma_S A.$$

If $A \subseteq B$, then we will denote by $\mathfrak{K}_S(A, B)$ the set of all $C \subseteq B$ such that $C \cap A = 0$ and $(A + C/C) \gamma_S (B/C)$. In view of the first condition, the second condition just means that $p^m b + c = a \in A$, where $p \in S$, $b \in B$ and $c \in C$, implies that $p^m a' = a$ for some $a' \in A$. It is obvious that $D \subseteq C \in \mathfrak{K}_S(A, B)$ implies that $D \in \mathfrak{K}_S(A, B)$. Also, since $0 \in \mathfrak{K}_S(A, B)$ just means that $A \gamma_S B$, we see that $\mathfrak{K}_S(A, B)$ is non-void if and only if $A \gamma_S B$. We note also that the submodules in $\mathfrak{K}_S(A, B)$ are just the kernels of those homomorphisms f defined on B for which $f(A) \gamma_S f(B)$ and which induce a monomorphism on A.

Definition 3. *We will call B a γ_S-essential extension of A and write $A \bar{\gamma}_S B$ if $A \subseteq B$ and if 0 is the only submodule of B in $\mathfrak{K}_S(A, B)$, i.e. if $A \gamma_S B$ and if f is any homomorphism defined on B which induces a monomorphism on A and which is such that $f(A) \gamma_S f(B)$, then f is a monomorphism.*

We note that if S is void, then the γ_S-essential extensions of a module A are just the ordinary essential extensions of A.

Lemma 3. *If $A \gamma_S B$ and $B \gamma_S C$, then $A \bar{\gamma}_S C$ implies that $A \bar{\gamma}_S B$ and $B \bar{\gamma}_S C$.*

Proof. Let $D \in \mathfrak{K}_S(A, B)$. If $p^m c + d = a \in A$, where $p \in S$, $c \in C$ and $d \in D$, then since $B \gamma_S C$, there exists $b \in B$ such that $p^m b + d = a$. Since $D \in \mathfrak{K}_S(A, B)$, there exists $a' \in A$ such that $p^m a' = a$. Therefore, $D \in \mathfrak{K}_S(A, C)$, and since $A \bar{\gamma}_S C$, $D = 0$. Therefore, $A \bar{\gamma}_S B$.

Now, let f be a homomorphism defined on C which induces a monomorphism on B and which is such that $f(B) \gamma_S f(C)$. Then $f(A) \gamma_S f(B)$ and by **P 1**, $f(A) \gamma_S f(C)$. Since $A \bar{\gamma}_S C$, f is a monomorphism. Therefore, $B \bar{\gamma}_S C$.

Proposition 1. *If $A \bar{\gamma}_S B$ and $A \gamma_S C$, where C is γ_S-injective, then the identity homomorphism of A is extendable to a monomorphism from B into C.*

Proof. Since $A \gamma_S B$ and C is γ_S-injective, the identity homomorphism of A is extendable to a homomorphism f from B into C. Then, by **P 2**, $f(A) \gamma_S f(B)$. But since $A \bar{\gamma}_S B$, f is a monomorphism.

Lemma 4. *If $A \gamma_S B$, then there is a homomorphism f defined on B which induces a monomorphism on A and which is such that $f(A) \bar{\gamma}_S f(B)$.*

Proof. Let $\mathfrak{C}$ be a chain under inclusion, of submodules in $\mathfrak{K}_S(A, B)$ and let C denote the union of all submodules in $\mathfrak{C}$. Obviously, $C \cap A = 0$. Now assume that $p^n b + c = a \in A$, where $p \in S$, $b \in B$ and $c \in C$. Then, $c \in C'$ for some $C' \in \mathfrak{C}$ and since $C' \in \mathfrak{K}_S(A, B)$, $p^n a' = a$ for some $a' \in A$. Therefore, $C \in \mathfrak{K}_S(A, B)$.

By Zorn's lemma, there exists a maximal $C \in \mathfrak{K}_S(A, B)$. Let f denote the natural homomorphism from B onto B/C and let $D \in \mathfrak{K}_S(f(A), f(B))$. Then $C \subseteq f^{-1}(D) \subseteq B$ and since f is biunique on A, $f^{-1}(D) \cap A = 0$. But $f^{-1}(D)$ is the kernel of gf, where g is the natural homomorphism from $f(B)$ onto $f(B)/D$, and since $D + f(A)/D$ is

the image of A under gf, $gf(A)\,\gamma_S gf(B)$, so that $f^{-1}(D) \in \mathfrak{K}_S(A, B)$. But by the choice of C, $f^{-1}(D) = C$ so that $D = 0$ and therefore, $f(A)\,\bar{\gamma}_S f(B)$.

Definition 4. *We will say that B is a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension of A if $A\bar{\gamma}_S B$ and if $B \subseteq C$ and $A\bar{\gamma}_S C$ imply $B = C$.*

Definition 5. *We will say that B is $\bar{\gamma}_S$-maximal if it is a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension of itself, i.e. if $B\bar{\gamma}_S C$ implies $B = C$.*

Theorem 5. *Any module A possesses a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension.*

Proof. Assume that A does not possess a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension. Then, for any ordinal k, one can construct a well-ordered sequence $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$, where $i < j$ implies that A_i is properly contained in A_j and where for each i, $A\bar{\gamma}_S A_i$. By Theorems 3 and 4, there exists a γ_S-injective module B such that $A\,\gamma_S B$. Let us choose k so that the cardinal corresponding to k is greater than the cardinal of B. Then surely the cardinal of A_k is greater than the cardinal of B. But this leads to a contradiction since by Proposition 1, there is a monomorphism from A_k into B.

Theorem 6. *If B is a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension of A and if $B \subseteq C$, where $A\,\gamma_S C$,* then *B is a direct summand of C.*

Proof. By Lemma 4, there exists a homomorphism f defined on C which induces a monomorphism on A and which is such that $f(A)\bar{\gamma}_S f(C)$. By **P** 4, $f(A)\gamma_S f(B)$ so that $\ker f \cap B \in \mathfrak{K}_S(A, B)$. Since $A\bar{\gamma}_S B$, $\ker f \cap B = 0$ so that f induces a monomorphism on B. Since B, and therefore $f(B)$, is a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension of A, $f(B) = f(C)$ and therefore, $C = B \oplus \ker f$.

Corollary 1. *If B is a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension of A, then B is γ_S-injective.*

Corollary 2. *If B is $\bar{\gamma}_S$-maximal, then B is γ_S-injective.*

Theorem 7. *If $A\bar{\gamma}_S C$, where C is γ_S-injective, then C is a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension of A and C is unique up to equivalence.*

Proof. By Theorem 5, there exists a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension B of A. Since C is γ_S-injective, by Proposition 1, the identity homomorphism of A is extendable to a monomorphism f from B into C. Since B, and therefore $f(B)$, is a maximal $\bar{\gamma}_S$-extension of A, $f(B) = C$.

Corollary. *A γ_S-injective module is $\bar{\gamma}_S$-maximal.*

Definition 6. *We write $A\tilde{\gamma}_S B$ if $A\,\gamma_S B$ and if for any homomorphism f from B into D, if $f(A)\gamma_S D$ and f induces a monomorphism on A, then $f(B)\gamma_S D$ and f is a monomorphism.*

Obviously, $A\tilde{\gamma}_S B$ implies $A\bar{\gamma}_S B$.

Theorem 8. *If $A \subseteq B$ and $A\bar{\gamma}_S C$, where C is γ_S-injective, then $A\tilde{\gamma}_S B$ if and only if there is an isomorphism from B onto an S-pure submodule of C which extends the identity homomorphism of A.*

Proof. The necessity is obvious by Proposition 1. To prove sufficiency, we may obviously assume that $B\gamma_S C$. Let f be a homomorphism from B into D which induces

a monomorphism on A and which is such that $f(A)\gamma_S D$. By Theorems 3 and 4, there exists a γ_S-injective module E such that $D\gamma_S E$ and then, f may be extended to a monomorphism g from C into E. By Theorems 6 and 7, $g(C)$ is a direct summand of E so that surely $f(B)\gamma_S E$ and by **P 4**, $f(B)\gamma_S D$.

4. Inherent topologies of a module.

Definition 7. *A homomorphism f from A into B will be called S-pure if for any $a \in A$ and any $n \in S^*$, n divides $f(a)$ in B implies that n divides a in A, or equivalently, if for any $a \in A$, any $p \in S$ and any natural integer n, p^n divides $f(a)$ in B implies that p^n divides a in A.*

The following properties of S-pure homomorphisms are immediate from the definition.

P 5. *An injection from A into B is S-pure if and only if $A\gamma_S B$ and the functional product of two S-pure homomorphisms is an S-pure homomorphism.*

P 6. *If f is a homomorphism from A into B, then f is S-pure if and only if*

$$\ker f \subseteq \bigcap_{n \in S^*} nA = A_S \text{ and } f(A)\gamma_S B.$$

P 7. *An S-pure homomorphism maps S-pure submodules onto S-pure submodules.*

We notice that **P 7** implies that if $A\gamma_S B$ and if f is an S-pure homomorphism defined on B which induces an isomorphism on A, then $\ker f \in \mathfrak{K}_S(A,B)$ so that if $A\bar{\gamma}_S B$, then f is an isomorphism. Also, property **P 7** is not characteristic of S-pure homomorphisms, since for any module A, if $n \in S^*$, then the natural homomorphism from A onto A/nA has this property (see [6], Lemma 3 (the condition $nS = 0$ given there is superfluous)), although it is not necessarily an S-pure homomorphism by **P 6**.

For any module A, $\{nA \mid n \in S^*\}$ is a basis of the filter of neighborhoods of 0 in a topology $T(A,S)$ of A which is compatible with addition and scalar multiplication. This topology is discrete if and only if $nA = 0$ for some $n \in S^*$ (A is of S-bounded order). Of course, $T(A,S)$ is separated if and only if $A_S = 0$ and in general, $T(A/A_S, S)$ is separated. If $A \subseteq B$, then A is dense in $\{B, T(B,S)\}$ if and only if B/A is S-divisible, i.e. divisible by every prime in S or equivalently, divisible by every element in S^*. From this it follows easily that if A is dense in $\{B, T(B,S)\}$ and B is dense in $\{C, T(C,S)\}$, then A is dense in $\{C, T(C,S)\}$. Finally, if $A\gamma_S B$, then for all $n \in S^*$, $nB \cap A = nA$ so that $T(B,S)$ induces $T(A,S)$ on A and $B_S \cap A = A_S$.

Lemma 5. *If $A \subseteq B$, if A is dense in $\{B, T(B,S)\}$ and if $C \in \mathfrak{K}_S(A,B)$, then $C \subseteq B_S$.*

Proof. Let $c \in C$ and $n \in S^*$. Since A is dense in $\{B, T(B,S)\}$, $c + nB$ meets A. $c + nb = a \in A$. Since $C \in \mathfrak{K}_S(A,B)$, there exists $a' \in A$ such that $a = na'$. Then, $c = n(a' - b) \in nB$.

Corollary. *If $A\gamma_S B$, if A is dense in $\{B, T(B,S)\}$ and if B_S is an essential extension of A_S, then $A\bar{\gamma}_S B$.*

From now on, we will use the symbol $A\hat{\gamma}_S B$ to indicate that $A\gamma_S B$, that A is dense in $\{B, T(B,S)\}$ and that B_S is an essential extension of A_S. Using the remarks made before Lemma 5, it is easy to show that this relation is transitive.

Lemma 6. *If $A \bar{\gamma}_S B$ then B_S is an essential extension of A_S.*

Proof. Assume that B_S is not an essential extension of A_S and let C be a non-null submodule of B_S such that $C \cap A_S = 0$. Since $A \gamma_S B$, $B_S \cap A = A_S$ so that $C \cap A = 0$. Then the natural homomorphism from B onto B/C induces a monomorphism on A and by **P 6**, it is S-pure so that $C \in \mathfrak{K}_S(A, B)$ and $A \bar{\gamma}_S B$ does not hold.

Lemma 7. *If A is any module, then there exists a module E such that $A \hat{\gamma}_S E$, $E = E_S + A$ and E_S is a maximal essential extension of A_S.*

Proof. Let D be a maximal essential extension of A_S and let E be the direct sum of D and A with amalgamated submodule A_S. If $n(d + a) = a' \in A$, where $n \in S^*$, $d \in D$ and $a \in A$, then $nd = a' - na \in D \cap A = A_S$ so that there exists $a'' \in A$ such that $nd = na''$ and therefore, $a' = n(a + a'') \in nA$. Therefore, $A \gamma_S E$. Since D is divisible, $D \subseteqq E_S$. Now, let $e \in E_S$, $e = d + a$, $d \in D$ and $a \in A$. If $n \in S^*$, then there exists $a' \in A$ and $d' \in D$ such that $e = (d + a) = n(d' + a')$. Then, $d - nd' = na' - a \in D \cap A = A_S$ so that there exists $a'' \in A$ such that $na' - a = na''$ and therefore, $a = n(a' - a'') \in nA$. Since this is true for all $n \in S^*$, $a \in A_S \subseteqq D$ so that $e = d + a \in D$. Therefore, $E_S = D$ is a maximal essential extension of A_S. Since $E/A = D + A/A \simeq D/D \cap A = D/A_S$, E/A is S-divisible, i.e. A is dense in $\{E, T(E, S)\}$.

Corollary. *If A is $\bar{\gamma}_S$-maximal, then A_S is divisible.*

Proposition 2. *If $T(A,S)$ is separated and if $\{B, T\}$ denotes the completion of $\{A, T(A,S)\}$ as a topological R-module, then $A \gamma_S B$.*

Proof. Suppose that $nb = a \in A$, where $n \in S^*$ and $b \in B$. Since A is dense in $\{B, T\}$, for each neighborhood V of 0 in $\{B, T\}$, there exists $a_V \in (b + V) \cap A$. Let $a_V = b + c_V$, $c_V \in V$. Then $na_V = a + nc_V$ so that $a - na_V \in V \cap A$. But since $\{A, T(A,S)\}$ is a topological R-submodule of $\{B, T\}$, there exists a neighborhood V of 0 in $\{B, T\}$ such that $V \cap A = nA$ and then, $a - na_V \in nA$ so that $a \in nA$.

5. The local case. In this section, we consider the case where S contains only one prime p, although there may be more than one prime in R.

Proposition 3. *If $T(A,p)$ is separated and if $\{B, T\}$ denotes the completion of $\{A, T(A,p)\}$ as a topological R-module, then $T = T(B,p)$.*

Proof. By Proposition 2, T and $T(B,p)$ both induce the same topology on A. If we can show that $T(B,p)$ is coarser than T, since A is dense in $\{B, T\}$, it will follow from [3], Corollary of Proposition 9, that $T = T(B,p)$. Now one knows that for each natural integer n, the closure of $p^n A$ in $\{B, T\}$ is a neighborhood of 0 in $\{B, T\}$. We will show that the closure of $p^n A$ in $\{B, T\}$ is contained in $p^n B$ and this will prove that $T(B,p)$ is coarser than T. Let $\{a_i\}$ be a Cauchy sequence of elements of $p^n A$ which converges in $\{B, T\}$ to some element b. We must show that $b \in p^n B$. By dropping down to a subsequence, we can arrange that each $a_{i+1} - a_i$ is divisible by p^{n+i}, say $a_{i+1} - a_i = p^{n+i} c_i$, where $c_i \in A$. Set $a_1 = p^n d_1$, $d_1 \in A$, and then

$$d_i = d_1 + p c_1 + \cdots + p^{n+i-1} c_{i-1} \in A \, .$$

Then, $\{d_i\}$ is a Cauchy sequence in $\{A, T(A,p)\}$ converging to some $d \in B$. Since

$$a_i = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_i - a_{i-1}) = \\ = p^n d_1 + p^{n+1} c_1 + \cdots + p^{n+i-1} c_{i-1} = p^n d_i ,$$

we have that $\{a_i\}$ converges to $p^n d$, and since $T(A,p)$ and therefore T is separated, $b = p^n d$. (The latter part of this argument is taken from the proof of Lemma 20 in [5].)

Corollary 1. *If $T(A,p)$ is separated and if $\{B, T\}$ denotes the completion of $\{A, T(A,p)\}$, then $A \tilde{\gamma}_p B$ and $\{B, T(B,p)\}$ is complete.*

Proof. By Propositions 2 and 3 and the fact that the completion of a separated module is also separated.

Corollary 2. *If A is $\overline{\gamma}_p$-maximal, then $\{A, T(A,p)\}$ is complete.*

Proof. By the Corollary of Lemma 7, A_p is divisible so that $A = A_p \oplus B$, where $T(B,p)$ is separated and B is $\overline{\gamma}_p$-maximal. By the preceding corollary, $\{B, T(B,p)\}$ is complete. It is then easy to show that $\{A, T(A,p)\}$ is also complete.

Lemma 8. *If 0 is the only p-divisible submodule of A, then A contains a non-null, p-pure, p-cyclic submodule.*

Proof. Since 0 is the only p-divisible submodule of A, the torsion submodule of A is p-primary. If this torsion submodule is non-null, then it contains a non-null cyclic direct summand of prime power order and this is a non-null, p-pure, p-cyclic submodule of A.

Assume now that A is torsion-free. Then A contains a non-null pure submodule C of rank 1. One may think of C as an R-submodule of the field of quotients Q of R. Let R' denote the ring of quotients of R with respect to p. If $R'C = Q$, then for any $u \in C$, there exists $v/s \in R'C$, where $v \in C$, $s \in R$ and s is prime to p, such that $u = p(v/s)$ so that $su = pv$. Then, there exist $h, k \in R$ such that $1 = hs + kp$ so that $u = h(su) + kpu = hpv + kpu = p(hv + ku)$. Therefore, C is divisible by p, contradicting our hypothesis. Therefore, $R'C$ is properly contained in Q so that it is a cyclic R'-module. Then, there exists $c \in C$ such that for any $c' \in C$, there exist $r, s \in R$, s prime to p, such that $sc' = rc$. Let D be the cyclic submodule of C generated by c. We show that D is p-pure in A by showing that it is p-pure in C. Suppose that $p^n c' = tc$, where $c' \in C$ and $t \in R$. Then, $sc' = rc$, where $r, s \in R$ and s is prime to p. Also, $1 = hs + kp^n$ for some $h, k \in R$ so that $c' = hsc' + kp^n c' = hrc + ktc = (hr + kt)c \in D$.

Theorem 9. *If $A \gamma_p B$, then $A \overline{\gamma}_p B$ if and only if $A \tilde{\gamma}_p B$.*

Proof. By the Corollary of Lemma 5 and by Lemma 6, all we have to show is that $A \overline{\gamma}_p B$ implies that A is dense in $\{B, T(B,p)\}$, i.e. B/A is p-divisible. Assume that B/A is not p-divisible, let f denote the natural homomorphism from B onto B/A, let C be the maximum p-divisible submodule of B/A and set $f^{-1}(C) = D \subset B$. Obviously, $C \gamma_p (B/A)$ so that by **P 4**, $D \gamma_p B$. By Lemma 8, B/D contains a non-null, p-pure, p-cyclic submodule Rd. By Lemma 1, there exists $b \in B$, which maps onto d, modulo D, and such that $Rb \cap D = 0$. By **P 4**, $(Rb + D) \gamma_p B$ and by **P 3**,

$$(Rb + D/Rb) \gamma_p (B/Rb)$$

so that $Rb \in \mathfrak{K}_p(D, B)$ and therefore, $D\bar{\gamma}_p B$ does not hold. By Lemma 3, $A\bar{\gamma}_p B$ does not hold.

Corollary. *If $\{A, T(A,p)\}$ is complete and if A_p is divisible, then A is $\bar{\gamma}_p$-maximal.*

We remark that if $A\bar{\gamma}_p B$, where B is γ_p-injective, and if $A \subseteqq C \subseteqq B$, then it is not necessarily true that $A\bar{\gamma}_p C$, since not every submodule of the p-divisible module B/A is p-divisible.

Lemma 9. *If $\{A, T(A,p)\}$ is complete and separated, then A is divisible by every prime different from p.*

Proof. Let $a \in A$ and let q be some prime of R different from p. For every natural number n, there exist $r_n, s_n \in R$ such that $1 = r_n q + s_n p^n$ and then, $a = r_n q a + s_n p^n a$. Since the sequence $\{s_n p^n a\}$ tends to 0 in $\{A, T(A,p)\}$, $\{r_n q a\}$ tends to a and is therefore a Cauchy sequence. Therefore, if k is any natural number, there exists an index i such that

$$m, n > i \Rightarrow q(r_m a - r_n a) \in p^k A,$$

say $q(r_m a - r_n a) = p^k a_{m,n}$. Then,

$$r_m a - r_n a = (r_k q + s_k p^k)(r_m a - r_n a) = r_k p^k a_{m,n} + s_k p^k (r_m a - r_n a) \in p^k A.$$

Therefore, $\{r_n a\}$ is a Cauchy sequence in $\{A, T(A,p)\}$ and since $\{A, T(A,p)\}$ is complete, this sequence converges to some $b \in A$. Then, $\{q r_n a\}$ converges to qb and since $T(A,p)$ is separated, $qb = a$.

6. The general case. We begin this section by showing that Theorem 9 is not generalizable to the case where S contains more than one prime. Let p and q be two different primes in S, let Q denote the field of quotients of R and let C be the set of all elements of Q that are of the form a/b, where $a, b \in R$ and b is a power of p. Proofs for the following statements about C may be found in [2].

1) C is an R-submodule of Q which is not cyclic and therefore not a direct sum of cyclic modules.
2) Every non-null submodule of C properly contains a non-null cyclic submodule.
3) C is not q-divisible and therefore not S-divisible.
4) If E is a non-null cyclic submodule of C, then C/E is of type p^∞.

By 1) and Theorem 2, there exists a homomorphism f from some module B onto C such that $\ker f \gamma_S B$ and $A = \ker f$ is not a direct summand of B. If $A\bar{\gamma}_S B$ did not hold, by Lemma 4, there would exist a non-trivial submodule $D \in \mathfrak{K}_S(A, B)$ such that $(A + D/D)\bar{\gamma}_S(B/D)$. By 2), $f(D)$ properly contains a non-null cyclic submodule Rx and there exists $d \in D$ such that $f(d) = x$. Obviously, $Rd \in \mathfrak{K}_S(A, B)$ so that $(A + Rd/Rd)\gamma_S(B/Rd)$. Also, $(B/Rd)/(A + Rd/Rd) \cong C/Rx$ is of type p^∞, by 4), so that it is surely S-divisible and also, $(B/Rd) \subseteqq (A + Rd/Rd)_S$. Since

$$(A + Rd/Rd)\gamma_S(B/Rd),\ (B/Rd)_S = (A + Rd/Rd)_S.$$

Then, by the Corollary of Lemma 5, $(A + Rd/Rd)\bar{\gamma}_S(B/Rd)$. Now the natural homomorphism h from B/Rd onto B/D induces a monomorphism on $A + Rd/Rd \cong A$ and $h(A + Rd/Rd) = (A + D/D)\gamma_S(B/D)$ so that h is an isomorphism and therefore, $D = Rd$, a contradiction. Therefore, $A\bar{\gamma}_S B$. But by 3), $A\hat{\gamma}_S B$ does not hold.

Definition 8. *A module will be called S-algebraically compact if it is the direct sum of a divisible module and of a direct product of modules D_p, p running through S, where each $\{D_p, T(D_p, p)\}$ is complete and separated.*

Theorem 10. *If A is any module, then there exists an S-algebraically compact module B such that $A\hat{\gamma}_S B$.*

Proof. By Lemma 7, there exists a module E such that $A\hat{\gamma}_S E$, $E = E_S + A$ and E_S is a maximal essential extension of A_S. Then, $E = E_S \oplus C$ and $\{C, T(C,S)\}$ is separated.

For each $p \in S$, let g_p denote the natural homomorphism from C onto C/C_p and let D_p denote the completion of $\{C/C_p, T(C/C_p, p)\}$. Then, g_p is a p-pure homomorphism and by Proposition 2, $(C/C_p)\gamma_p D_p$ so that g_p may be considered as a homomorphism from C into D_p, and as such it is also p-pure. Let D denote the direct product of all the D_p, $p \in S$. Then, there is a homomorphism g from C into D such that for each $p \in S$, $g_p = h_p g$, where h_p is the projection from D onto D_p. If $g(c) = 0$, then for each $p \in S$, $g_p(c) = 0$. Then, $c \in \bigcap_{p\in S} C_p = C_S = 0$. Therefore, g is an isomorphism from C into D. We now prove that $g(C)\gamma_S D$. Assume that $g(c) = p^n d$, where $c \in C$, $p \in S$ and $d \in D$. Then, $g_p(c) = h_p g(c) = p^n h_p(d)$ and since g_p is p-pure, there exists $c' \in C$ such that $c = p^n c'$ so that $g(c) = p^n g(c')$.

We now prove that $g(C)$ is dense in $\{D, T(D,S)\}$. This is equivalent to showing that $D/g(C)$ is S-divisible or equivalently, that $g(C)$ is dense in $\{D, T(D,p)\}$ for each $p \in S$. Let $d \in D$ and let n be any natural integer. By Proposition 3, we know that C/C_p is dense in $\{D_p, T(D_p, p)\}$ so that there exists $c \in C$ such that $h_p(d) - g_p(c) \in p^n D_p$, i.e. $h_p(d - g(c)) \in p^n D_p$. Also, by Lemma 9, for each $q \in S$ different from p, $p^n D_q = D_q$ so that $h_q(d - g(c)) \in p^n D_q$. We may therefore set, for each $q \in S$, $h_q(d - g(c)) = p^n d_q$, $d_q \in D_q$. But there exists $d' \in D$ such that for all $q \in S$, $h_q(d') = d_q$ and then, $h_q(d - g(c) - p^n d') = 0$ for all $q \in S$ so that $d - g(c) - p^n d' = 0$ and therefore, $g(c) \in (d + p^n D) \cap g(C)$.

Now, let $B = E_S \oplus D$. By Proposition 3, B is S-algebraically compact. Since $A\gamma_S E$ and obviously, $E = (E_S \oplus C)\gamma_S(E_S \oplus D) = B$, by **P 1**, $A\gamma_S B$. Since E_S is divisible, $E_S \subseteq B_S$. Let $b \in B_S$, $b = e + d$, $e \in E_S$, $d \in D$. If $p \in S$ and if n is any natural integer, then there exists $b' \in B$ and $e' \in E_S$ such that $b = p^n b'$ and $e = p^n e'$ and then, $d = p^n(b' - e')$. It follows that $d \in p^n D$ and therefore, $d \in D_S = 0$. Therefore, $b = e \in E_S$ so that $B_S = E_S$ is a maximal essential extension of A_S. Since $B/E = (E_S \oplus D)/(E_S \oplus C) \simeq D/C$, and since C is dense in $\{D, T(D,S)\}$, E is dense in $\{B, T(B,S)\}$. But we know that A is dense in $\{E, T(E,S)\}$, so that A is dense in $\{B, T(B,S)\}$.

Corollary 1. *A module A is γ_S-injective if and only if it is S-algebraically compact.*

Proof. Assume first of all that A is S-algebraically compact, i.e. $A = D_0 \oplus \sum_{p\in S}^{*} D_p$ ($\sum^*$ indicates the direct product), where D_0 is divisible and each $\{D_p, T(D_p, p)\}$ is complete and separated. Since D_0 is injective, it is γ_S-injective. By the Corollary of Theorem 9, for each $p \in S$, D_p is γ_p-injective and therefore, it is γ_S-injective. But

a direct product of γ_S-injective modules is also γ_S-injective so that A is γ_S-injective.

Now, assume that A is γ_S-injective. By Theorem 10, there exists an S-algebraically compact module B such that $A \hat{\gamma}_S B$. By the Corollaries of Lemma 5 and Theorem 6, $A = B$.

Corollary 2. *A module A is S-algebraically compact if and only if $\{A, T(A,S)\}$ is complete and A_S is divisible.*

Proof. Assume first of all that A is S-algebraically compact, i.e. $A = D_0 \oplus \sum^*_{p \in S} D_p$, where D_0 is divisible and each $\{D_p, T(D,p)\}$ is complete and separated. If $n \in S^*$, $n = \prod_{p \in T} p^{e_p}$, T finite and each $e_p > 0$, then, by Lemma 9,

$$nA = nD_0 \oplus \sum_{p \in S}^* nD_p = D_0 \oplus \sum_{p \notin T}^* D_p \oplus \sum_{p \in T}^* p^{e_p} D_p =$$
$$= \bigcap_{p \in T} \Big(D_0 \oplus \sum_{q \neq p}^* D_q \oplus p^{e_p} D_p\Big).$$

From this, one sees immediately that $A_S = D_0$ and is therefore divisible and that if for each $p \in S$, h_p denotes the projection of A onto D_p, then

$$nA = \bigcap_{p \in T} h_p^{-1}(p^{e_p} D_p)$$

so that $T(A,S)$ is the product of $T(D_0, S)$ and the $T(D_p, p)$. Since $\{D_0, T(D_0, S)\}$ and the $\{D_p, T(D_p, p)\}$ are complete, $\{A, T(A,S)\}$ is complete.

Conversely, assume that $\{A, T(A,S)\}$ is complete and that A_S is divisible. By Theorem 10, there exists an S-algebraically compact module B such that $A \hat{\gamma}_S B$. Since A_S is divisible, $A_S = B_S$. If $b \in B$, then the trace on A of the filter of neighborhoods of B in $\{B, T(B,S)\}$ is a Cauchy filter of the complete module $\{A, T(A,S)\}$ so that it converges to some $a \in A$. Then, the filters of neighborhoods of a and b in $\{B, T(B,S)\}$ have an upper bound so that they coincide. Therefore, $a - b$ has the same filter of neighborhoods as 0 so that $a - b \in B_S = A_S \subseteq A$ and therefore, $b \in A$.

Corollary 3. *If A is a module of S-bounded order, then A is γ_S-injective.*

Theorem 11. *If $A \subseteq B$, then $A \hat{\gamma}_S B$ if and only if $A \tilde{\gamma}_S B$.*

Proof. Assume first of all that $A \hat{\gamma}_S B$. By the Corollary of Lemma 5, $A \bar{\gamma}_S B$ so that if f is a homomorphism from B into D which induces a monomorphism on A and which is such that $f(A) \gamma_S D$, then by **P 2**, f is a monomorphism. Then, since $f(B)/f(A) \simeq B/A$, $f(B)/f(A)$ is S-divisible so that it is an S-pure submodule of $D/f(A)$ and therefore, by **P 4**, $f(B) \gamma_S D$. Therefore, $A \tilde{\gamma}_S B$.

Conversely, assume that $A \tilde{\gamma}_S B$. By Theorem 10 and its Corollary 1, there exists a γ_S-injective module C such that $A \hat{\gamma}_S C$. By Theorem 8, there exists an isomorphism g from B onto an S-pure submodule of C which extends the identity homomorphism of A. By Lemma 6, B_S is an essential extension of A_S. Since C/A is S-divisible, and since by **P 3**, $B/A \simeq g(B)/A \, \gamma_S C/A$, B/A is S-divisible. Therefore, $A \hat{\gamma}_S B$.

Bibliography

[1] S. Balcerzyk, On algebraically compact groups of I. Kaplansky. Fundamenta Math. **44**, 91—93 (1957).

[2] R. A. Beaumont and H. S. Zuckerman, A characterization of the subgroups of the additive rationals. Pac. J. Math. **1**, 169—177 (1951).

[3] N. Bourbaki, Topologie générale. Chap. I—II, 2ième édition, Act. Sci. et Ind., no 858 = 1142. Paris 1951.

[4] B. Eckmann und A. Schopf, Über injective Moduln. Arch. Math. **4**, 75—78 (1953).

[5] I. Kaplansky, Infinite abelian groups. Univ. of Mich. Pub. in Math., no 2.

[6] J. Łoś, Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups. Fundamenta Math. **44**, 84—90 (1957).

Eingegangen am 21. 10. 1959

Zum Sieb von LINNIK

Von G. J. RIEGER in Maryland (USA)

Die Methode des großen Siebes wurde von LINNIK[1]) erdacht und von RÉNYI[2]) vereinfacht. In der vorliegenden Note werden wir diese Methode auf algebraische Zahlkörper K verallgemeinern. Auf Anwendungen soll noch nicht eingegangen werden.

1. Vorbereitungen. Wir bezeichnen (wie üblich) mit

n den Grad von K,
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{f}, \ldots$ (ganze) Ideale von K,
$\mathfrak{o}$ das Einheitsideal von K,
$\alpha, \beta, \xi, \ldots$ ganze Zahlen von K,
$\langle\alpha\rangle$ das von α erzeugte Hauptideal,
$N\mathfrak{f}$ die Norm des Ideals $\mathfrak{f}$.

Die Konstante in $O(\ldots)$ bzw. $O_{\mathfrak{f}}(\ldots)$ hängt nur von K bzw. nur von K und $\mathfrak{f}$ ab.

Definition 1. *Die Zahl* α *heißt totalpositiv oder* $\alpha \succ 0$, *wenn alle zu* α *konjugierten reellen Zahlen positiv sind.*

Hilfssatz 1[3]). *In jeder Restklasse* mod $\mathfrak{f}$ *gibt es totalpositive Zahlen.*

Hilfssatz 2[4]). *Ist* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) | (\alpha - \beta)$, *so ist die simultane Kongruenz*

$$\xi \equiv \alpha \bmod \mathfrak{f}, \quad \xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{g}$$

lösbar, und die Lösungen bilden dann genau eine Restklasse mod $[\mathfrak{f}, \mathfrak{g}]$.

Definition 2. *Die Ideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *gehören zur selben absoluten Idealklasse, wenn es ganze Zahlen* α, β *aus* K *gibt mit* $\langle\alpha\rangle\, \mathfrak{a} = \langle\beta\rangle\, \mathfrak{b}$.

Definition 3. *Die Ideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *gehören zur selben engen Idealklasse* $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{o}$, *wenn es ganze Zahlen* $\alpha \succ 0$, $\beta \succ 0$ *aus K gibt mit* $\langle\alpha\rangle\, \mathfrak{a} = \langle\beta\rangle\, \mathfrak{b}$.

Die absoluten bzw. engen Idealklassen von K bilden eine endliche abelsche Gruppe (bezüglich einer auf der Hand liegenden Multiplikation), deren Ordnung wir mit h bzw. $h(\mathfrak{o})$ bezeichnen.

---

1) Vergleiche [1].
2) Vergleiche [2] und [3].
3) Wohlbekannt.
4) Wohlbekannt.

Offenbar ist die Einteilung aller Ideale in enge Idealklassen eine Verfeinerung der Einteilung aller Ideale in absolute Idealklassen, und jede absolute Idealklasse zerfällt in genau $h(\mathfrak{o})/h$ enge Idealklassen.

Definition 4. *Die zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremden Ideale* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *gehören zur selben Idealklasse* $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ *oder* $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{f}$, *wenn es ganze Zahlen* $\alpha \succ 0$, $\beta \succ 0$, $\alpha \equiv 1$ mod $\mathfrak{f}$, $\beta \equiv 1$ mod $\mathfrak{f}$ *gibt mit* $\langle\alpha\rangle\, \mathfrak{a} = \langle\beta\rangle\, \mathfrak{b}$.

Die (aus zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Idealen bestehenden) Idealklassen $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ bilden eine endliche abelsche Gruppe, deren Ordnung wir mit $h(\mathfrak{f})$ bezeichnen.

Bekanntlich gibt es in jeder engen und daher auch in jeder absoluten Idealklasse unendlich viele zu einem vorgegebenen Ideal $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideale. Nennen wir für den Augenblick die aus einer absoluten bzw. engen Idealklasse durch Streichen aller zu $\mathfrak{f}$ nicht teilerfremden Ideale entstehende Menge von Idealen eine $\mathfrak{f}$-absolute bzw. $\mathfrak{f}$-enge Klasse, so zerfällt offenbar jede $\mathfrak{f}$-absolute Klasse in $h(\mathfrak{o})/h$ $\mathfrak{f}$-enge Klassen und jede $\mathfrak{f}$-enge Klasse in $h(\mathfrak{f})/h(\mathfrak{o})$ Idealklassen $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$.

Hilfssatz 3[5]**.** *Sind* $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ *beliebige Ideale, so gibt es in jeder Idealklasse* $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ *unendlich viele Ideale* $\mathfrak{a}$ *mit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$.

Hilfssatz 4. *Es sei* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$; *sind die Idealklassen* $\mathfrak{H}_1$ mod $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{H}_2$ mod $\mathfrak{g}$ *in derselben engen Idealklasse enthalten, so haben sie mindestens ein Ideal gemein und umgekehrt.*

Beweis. Wählen wir $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{H}_1$ mod $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{H}_2$ mod $\mathfrak{g}$ gemäß Hilfssatz 3, so ist

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}\,, \tag{1}$$

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}\,. \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gibt es Zahlen α, β mit

$$\alpha \succ 0\,, \quad \beta \succ 0\,, \tag{3}$$

$$\langle\alpha\rangle\, \mathfrak{a} = \langle\beta\rangle\, \mathfrak{b}\,. \tag{4}$$

Es ist zu zeigen, daß es Zahlen ξ_0, η_0 gibt mit

$$\xi_0 \succ 0\,, \quad \eta_0 \succ 0\,, \tag{5}$$

$$\xi_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}\,, \quad \eta_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{g}\,, \tag{6}$$

$$\langle\xi_0\rangle\, \mathfrak{a} = \langle\eta_0\rangle\, \mathfrak{b}\,. \tag{7}$$

Wegen (4) kann (7) durch die hinreichende Bedingung

$$\beta\, \xi_0 = \alpha\, \eta_0 \tag{8}$$

ersetzt werden. Durchläuft nun ξ die Restklasse 1 mod $\mathfrak{f}$ bzw. η die Restklasse 1 mod $\mathfrak{g}$, so durchläuft $\beta\xi$ die Restklasse β mod $\langle\beta\rangle\, \mathfrak{f}$ bzw. $\alpha\eta$ die Restklasse α mod $\langle\alpha\rangle\, \mathfrak{g}$. Wegen Hilfssatz 2 und Hilfssatz 1 haben diese beiden letztgenannten Rest-

[5]) Wohlbekannt.

klassen genau dann eine Zahl

$$\xi = \beta\,\xi_0 = \alpha\,\eta_0\,,$$

(9) $$\xi \succ 0$$

gemein, wenn

(10) $$(\langle\beta\rangle\,\mathfrak{f},\langle\alpha\rangle\,\mathfrak{g})\,|\,(\beta-\alpha)$$

ist. Damit sind (6), (8) und wegen (3), (9) auch (5) erfüllt. Es ist also nur noch (10) nachzuweisen. Aus Symmetriegründen ist es hinreichend,

(11) $$(\langle\beta\rangle\,\mathfrak{f},\langle\alpha\rangle\,\mathfrak{g})\,|\,\beta$$

zu beweisen. Dazu sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal, das mit der Vielfachheit b, f, a, g in $\langle\beta\rangle$, $\mathfrak{f}$, $\langle\alpha\rangle$, $\mathfrak{g}$ aufgehen möge. Da der Fall $f > 0$, $g > 0$ wegen $(\mathfrak{f},\mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$ ausgeschlossen ist, haben wir drei Fälle zu beachten: Ist zunächst $f = g = 0$, so ist (11) klar; ist dagegen $f > 0$, $g = 0$ bzw. $f = 0$, $g > 0$, so ist wegen (1), (4) bzw. (2), (4) offenbar $a = b$ und somit (11) erfüllt. Damit ist der erste Teil von Hilfssatz 4 bewiesen. Die Umkehrung jedoch ist trivial wegen der vor Hilfssatz 3 gemachten Bemerkung.

Über Hilfssatz 4 hinaus ist klar, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{H}_1$ mod $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{H}_2$ mod $\mathfrak{g}$ mit $(\mathfrak{f},\mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$ entweder leer ist oder aus vollen Idealklassen $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ besteht; aus $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{g}$, $(\mathfrak{f},\mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$ folgt jedoch nicht notwendig $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$, wie man sich an Beispielen überlegen kann. Daher liefert Hilfssatz 4 nur

Hilfssatz 5. *Für* $(\mathfrak{f},\mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$ *gilt*

$$\frac{h(\mathfrak{f})}{h(\mathfrak{o})}\,\frac{h(\mathfrak{g})}{h(\mathfrak{o})} \leq \frac{h(\mathfrak{f}\mathfrak{g})}{h(\mathfrak{o})}\,.$$

Wir führen jetzt einen etwas weiter gefaßten Äquivalenzbegriff ein, in der diese zuletzt erwähnte Schwierigkeit nicht auftritt:

Definition 5. *Die zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremden Ideale* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *gehören zur selben Idealklasse* $\mathfrak{H}'$ mod $\mathfrak{f}$ *oder* $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{f}$, *wenn* $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ *(im Sinne von Definition 4) bezüglich jeder in* $\mathfrak{f}$ *aufgehenden Primidealpotenz ist.*

Die (aus zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Idealen bestehenden) Idealklassen $\mathfrak{H}'$ mod $\mathfrak{f}$ bilden eine endliche abelsche Gruppe, deren Ordnung wir mit $h'(\mathfrak{f})$ bezeichnen. Offenbar ist

$$h'(\mathfrak{o}) = h(\mathfrak{o})\,,\quad h'(\mathfrak{p}^a) = h(\mathfrak{p}^a)\qquad(\mathfrak{p}\ \text{Primideal}, a \geq 1)\,.$$

Aus $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{f}$ folgt $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{f}$; daher ist jede Idealklasse $\mathfrak{H}'$ mod $\mathfrak{f}$ die Vereinigung von Idealklassen $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$, und von der Gruppentheorie her ist sofort klar, daß jede Idealklasse $\mathfrak{H}'$ mod $\mathfrak{f}$ aus genau $h(\mathfrak{f})/h'(\mathfrak{f})$ Idealklassen $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ besteht, welche hinwiederum derselben engen Idealklasse angehören. Zusammen mit Hilfssatz 4 ergibt sich daher

Hilfssatz 6. *Es sei* $(\mathfrak{f},\mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$; *sind die Idealklassen* $\mathfrak{H}_1'$ mod $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{H}_2'$ mod $\mathfrak{g}$ *in derselben engen Idealklasse enthalten, so haben sie mindestens ein Ideal gemein und umgekehrt.*

Aus Definition 5 liest man unmittelbar ab, daß von $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b} \bmod \mathfrak{f}$, $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b} \bmod \mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b} \bmod [\mathfrak{f}, \mathfrak{g}]$ geschlossen werden kann. Das ergibt zusammen mit Hilfssatz 6 sofort

Hilfssatz 7. *Es sei* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$; *sind die Idealklassen* $\mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{g}$ *in derselben engen Idealklasse enthalten, so haben sie genau eine Idealklasse* $\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{f}\mathfrak{g}$ *gemein.*

Aus Hilfssatz 6 und Hilfssatz 7 folgt (im Gegensatz zu Hilfssatz 5) unmittelbar

Hilfssatz 8. *Für* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$ *gilt*

$$\frac{h'(\mathfrak{f})}{h'(\mathfrak{o})}\,\frac{h'(\mathfrak{g})}{h'(\mathfrak{o})} = \frac{h'(\mathfrak{f}\mathfrak{g})}{h'(\mathfrak{o})}.$$

Für

$$H(x; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f}) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f}}} 1$$

gilt bekanntlich[6])

$$H(x; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{f}) = \beta(\mathfrak{f})\,x + O_{\mathfrak{f}}(x^{1-1/n}) \qquad (x \to \infty) \tag{12}$$

mit einer nur von K und $\mathfrak{f}$ abhängigen positiven Konstanten $\beta(\mathfrak{f})$. Für

$$H(x; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{f}) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{f}}} 1$$

gilt daher

$$H(x; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{f}) = \beta'(\mathfrak{f})\,x + O_{\mathfrak{f}}(x^{1-1/n}) \qquad (x \to \infty) \tag{13}$$

mit einer nur von K und $\mathfrak{f}$ abhängigen positiven Konstanten $\beta'(\mathfrak{f})$, nämlich

$$\beta'(\mathfrak{f}) = \frac{h(\mathfrak{f})}{h'(\mathfrak{f})}\,\beta(\mathfrak{f});$$

da bei festem $\mathfrak{f}$ die Vereinigung aller Idealklassen $\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{f}$ genau die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale ist, folgt, wenn wir noch die für

$$H(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leq x} 1$$

gültige Beziehung

$$H(x) = \alpha x + O(x^{1-1/n}) \qquad (x \to \infty)$$

$(\alpha > 0)$ beachten, sofort

$$h'(\mathfrak{f})\,\beta'(\mathfrak{f}) = \frac{\varphi(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}}\,\alpha. \tag{14}$$

Aus (14) und Hilfssatz 8 folgt

Hilfssatz 9. *Für* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$ *gilt*

$$\frac{\beta'(\mathfrak{f})}{\beta'(\mathfrak{o})}\,\frac{\beta'(\mathfrak{g})}{\beta'(\mathfrak{o})} = \frac{\beta'(\mathfrak{f}\mathfrak{g})}{\beta'(\mathfrak{o})}.$$

Früher entwickelte Methoden gestatten es leicht, über (13) hinaus einen Exponenten $\sigma > 0$ anzugeben mit[7])

$$H(x; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{f}) = \beta'(\mathfrak{f})\,x + O(N\mathfrak{f}^{\sigma} x^{1-1/n}) \qquad (x \to \infty). \tag{15}$$

---

[6]) Vergleiche etwa [5], Hilfssatz 2. In [5], S. 159, Z. 12 v. o lies $S \leq$ statt $S =$.

[7]) Vergleiche neben [4] auch [5], § 6 und § 7.

Wegen[8])

$$h'(\mathfrak{f}) \leqq h(\mathfrak{f}) = O(\varphi(\mathfrak{f})) \tag{16}$$

und wegen (14) folgt

$$\frac{1}{\beta'(\mathfrak{f})} = O(N\mathfrak{f}). \tag{17}$$

In (15) wird daher das Fehlerglied sicherlich dann vom Hauptglied majorisiert, wenn $\mathfrak{f}$ die Bedingung

$$N\mathfrak{f}^{(1+\sigma)n} = O(x) \tag{18}$$

(mit einer geeigneten und nur von K abhängigen Konstanten) erfüllt.

2. Das große Sieb in K. Wir wählen jetzt eine beliebige enge Idealklasse aus, die wir mit $\mathfrak{H}_0 \bmod \mathfrak{o}$ oder — was dasselbe ist — mit $\mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o}$ bezeichnen und in der sich alles weitere abspielt. $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots\}$ bezeichne die in irgendeiner Weise nach nicht abnehmender Norm geordnete Folge aller Ideale von $\mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o}$. Es sei L eine beliebige natürliche Zahl; ferner sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal von K, und die $\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}$ seien beliebige in $\mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o}$ enthaltene Idealklassen. Wir setzen

$$\frac{H(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})}{H(L; \mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o})} = Q(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) \tag{19}$$

und definieren

$$f(x, L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mathfrak{a}_{[xH(L;\, \mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o})]} \in \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \tag{20}$$

$$F(x, L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) = (Q(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}))^{-1/2}\,(f(x, L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) - Q(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})). \tag{21}$$

Wegen (19), (15) ist

$$Q(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) = \frac{\beta'(\mathfrak{p})}{\beta'(\mathfrak{o})} + O(N\mathfrak{p}^{\sigma} L^{-1/n}) \qquad (L \to \infty). \tag{22}$$

Wegen (20), (19) ist

$$\int_0^1 f(x, L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, dx = \int_0^1 f^2(x, L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, dx = Q(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}); \tag{23}$$

für Primideale $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ ist wegen (20), Hilfssatz 7 und (19)

$$\int_0^1 f(x, L; \mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p}_1)\, f(x, L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}_2)\, dx = Q(L; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2); \tag{24}$$

für $\mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p} \neq \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}$ ist wegen (20) natürlich

$$\int_0^1 f(x, L; \mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p})\, f(x, L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p})\, dx = 0. \tag{25}$$

Daher ist wegen (21), (23), (22)

$$\int_0^1 F^2(x, L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, dx = 1 - Q(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) = 1 - \frac{\beta'(\mathfrak{p})}{\beta'(\mathfrak{o})} + O(N\mathfrak{p}^{\sigma} L^{-1/n}) \qquad (L \to \infty); \tag{26}$$

---

[8]) Vergleiche [4], (7.6).

für Primideale $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, welche die der Bedingung (18) nachgebildete Bedingung

$$N\mathfrak{p}_1^{(1+\sigma)n} = O(L), \quad N\mathfrak{p}_2^{(1+\sigma)n} = O(L) \tag{27}$$

erfüllen, ist wegen (21), (24), (23), (22), (17), Hilfssatz 9

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F(x, L; \mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p}_1)\, F(x, L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}_2)\, dx = \\ &\quad = (Q(L; \mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p}_1)\, Q(L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}_2))^{-1/2} (Q(L; \mathfrak{H} \bmod \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) - \\ &\quad - Q(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}_1)\, Q(L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}_2)) = \\ &\quad = O(N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)^{1/2+\sigma} L^{-1/n}); \end{aligned} \tag{28}$$

ist $\mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p} \neq \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}$, so ist wegen (21), (25), (23), (22)

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F(x, L; \mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p})\, F(x, L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p})\, dx = \\ &= -(Q(L; \mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p})\, Q(L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}))^{-1/2} = -\frac{\beta'(\mathfrak{p})}{\beta'(\mathfrak{o})} + O(N\mathfrak{p}^{\sigma} L^{-1/n}) \quad (L \to \infty). \end{aligned} \tag{29}$$

Wir betrachten jetzt eine beliebige Teilfolge $\mathfrak{B}(L) = \{\mathfrak{a}_{k(1)}, \ldots, \mathfrak{a}_{k(S)}\}$ von

$$\mathfrak{A}(L) = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{H(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{o})}\}.$$

$\mathfrak{E}$ sei die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x mit

$$[x H(L; \mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o})] + 1 = k(s)$$

für ein gewisses s $(s = 1, \ldots, S)$; $E(x)$ sei die charakteristische Funktion von $\mathfrak{E}$. Offenbar ist

$$\int_0^1 E(x)\, dx = \int_0^1 E^2(x)\, dx = \frac{S}{H(L; \mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o})}. \tag{30}$$

Wir definieren

$$a(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) = \int_0^1 E(x)\, F(x, L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, dx. \tag{31}$$

Bedeutet dann $\sum\limits_{\mathfrak{p}}$ Summation über alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit (27) und $\sum\limits_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}}$ Summation über alle in $\mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o}$ enthaltenen $\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}$ für diese $\mathfrak{p}$, so folgt wegen (26), (28), (29), (31)

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \int_0^1 \Big(E(x) - \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} a(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, F(x, L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\Big)^2 dx = \\ &= \int_0^1 E^2(x)\, dx - \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} a^2(L; \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) \left(1 + \frac{\beta'(\mathfrak{p})}{\beta'(\mathfrak{o})} + O(N\mathfrak{p}^{\sigma} L^{-1/n})\right) + \\ &+ \sum_{\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2} \sum_{\mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p}_1} \sum_{\mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}_2} a(L; \mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p}_1)\, a(L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}_2)\, O(N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)^{1/2+\sigma} L^{-1/n}) + \\ &+ \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p} \neq \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}} a(L; \mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p})\, a(L; \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}) \left(-\frac{\beta'(\mathfrak{p})}{\beta'(\mathfrak{o})} + O(N^{\sigma} \mathfrak{p}\, L^{-1/n})\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Beachten wir noch, daß

$$\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} a^2(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) + \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p} \neq \mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}} \sum a(L;\mathfrak{H}_1' \bmod \mathfrak{p})\, a(L;\mathfrak{H}_2' \bmod \mathfrak{p}) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}} \Big(\sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} a(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\Big)^2$$

ist, so folgt aus (32)

$$0 \leqq \int_0^1 E^2(x)\,dx - (1 + O(A^\sigma L^{-1/n})) \sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} a^2(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) + \tag{33}$$

$$+ O(A^{1+\sigma} L^{-1/n}) \Big(\sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} |a(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})|\Big)^2 \qquad (L \to \infty)\,,$$

wenn wir $N\mathfrak{p} \leqq A$ und wegen (27) noch

$$A = O\left(L^{\frac{1}{(1+\sigma)n}}\right) \tag{34}$$

voraussetzen; dabei bleibt (33) richtig, wenn — wie die Herleitung von (33) zeigt — (34) durch eine stärkere Bedingung ersetzt wird. Setzen wir noch

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq A} \sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} a^2(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) = \omega\,, \tag{35}$$

so folgt wegen

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq A} 1 = O\left(\frac{A}{\log A}\right) \qquad (A \to \infty)$$

und wegen (16) durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\Big(\sum_{N\mathfrak{p} \leqq A} \sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} |a(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})|\Big)^2 = O\left(\frac{A^2}{\log A}\right) \omega \qquad (A \to \infty)\,. \tag{36}$$

Aus (30), (33), (36) ergibt sich

$$H(L;\mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{d})\,\omega \leqq 2S\,, \tag{37}$$

falls wir — stärker als (34) —

$$A = O\left((L^{1/n} \log L)^{\frac{1}{3+\sigma}}\right) \tag{38}$$

(mit einer passend gewählten und nur von K abhängigen Konstanten) voraussetzen. Mit

$$S(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{a}_{k(s)} \in \mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}} 1$$

gilt wegen (31), (21), (30) offenbar

$$H(L;\mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{d})\, Q^{1/2}(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, a(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) = \tag{39}$$

$$= S(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) - Q(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, S\,.$$

Aus (37), (35), (39), (38) folgt

Satz 1. *Es existiert eine nur von* K *abhängige Konstante* $c(\mathsf{K}) > 0$ *derart, daß aus*

$$A \leqq c(\mathsf{K})\, (L^{1/n} \log L)^{\frac{1}{3+\sigma}} \tag{40}$$

die Abschätzung

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqq A} Q^{-1}(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) \sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o}} (S(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) - Q(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, S)^2 \leqq \leqq 2H(L;\mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o})\, S \tag{41}$$

folgt.

Satz 1 enthält, wenn man von der hier nicht näher angegebenen Konstanten $c(\mathsf{K})$ in (40) absieht, die Hauptungleichung von [3] als Spezialfall[9]).

Es sei $g(\mathfrak{p})$ bzw. $q(\mathfrak{p})$ eine für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von K erklärte Funktion mit

$$0 < g(\mathfrak{p}) < \frac{h'(\mathfrak{p})}{h'(\mathfrak{o})} \quad \text{bzw.} \quad q(\mathfrak{p}) \geqq 1\,.$$

Wir setzen

$$g = \min_{N\mathfrak{p}\leqq B}\Big(\min_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o}} Q(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, g(\mathfrak{p})\Big)\,, \tag{42}$$

$$q = \max_{N\mathfrak{p}\leqq B} q(\mathfrak{p})\,, \tag{43}$$

wobei B die rechte Seite von (40) bedeutet.

Definition 6. *Ein Primideal $\mathfrak{p}$ heißt ein (g, q)-Ausnahmeprimideal, wenn für mindestens $g(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{H}_0'$* mod $\mathfrak{o}$ *enthaltene Idealklassen $\mathfrak{H}'$* mod $\mathfrak{p}$ *gilt*

$$|S(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) - Q(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, S|\; q(\mathfrak{p}) \geqq Q(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, S\,. \tag{44}$$

Satz 2. *Unter den Primidealen $\mathfrak{p}$ mit* (40) *gibt es höchstens*

$$\frac{2H(L;\mathfrak{H}_0 \bmod \mathfrak{o})\, q^2}{g\,S}$$

(g, q)-Ausnahmeprimideale.

Beweis. Für jedes (g, q)-Ausnahmeprimideal gilt wegen (44), (42), (43)

$$\begin{aligned} &Q^{-1}(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) \sum_{\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{H}_0' \bmod \mathfrak{o}} (S(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p}) - Q(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, S)^2 \geqq \\ &\geqq Q^{-1}(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, g(\mathfrak{p})\, Q^2(L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})\, S^2 q^{-2}(\mathfrak{p}) \geqq g\, S^2 q^{-2}\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Bezeichnet Y die Anzahl der (g, q)-Ausnahmeprimideale mit (40), so folgt aus (41), (45)

$$g\, S^2 q^{-2}\, Y \leqq 2H(L;\mathfrak{H}_0 \bmod \mathfrak{o})\, S\,,$$

was zu zeigen war.

Ebenso wie die Hauptungleichung von [3] läßt sich auch (41) auffassen als eine Folgerung aus einer Art Besselscher Ungleichung für *Systeme fastunabhängiger Funktionen* im Sinne von RÉNYI — ein Begriff, der dem Begriff *Systeme unabhängiger Funktionen* im Sinne von KAC und STEINHAUS nachgebildet ist. Die Anwendbarkeit dieser letztgenannten Ungleichung auf das vorliegende Problem ergibt sich im wesentlichen durch den sich auf Hilfssatz 9 stützenden Nachweis, daß die durch (21) erklärten Funktionen $F(x, L;\mathfrak{H}' \bmod \mathfrak{p})$ ein (noch zu normierendes) *System von fastorthogonalen Funktionen* im Sinne von R. P. BOAS JR. bildet.

---

[9]) Vergleiche [3], (18).

Literaturverzeichnis

[1] U. V. Linnik, Das große Sieb. C.R. Acad. Sci. URSS **30**, 290—292 (1941).
[2] A. Rényi, Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendentes et ses applications à la théorie des nombres. J. Math. pures et appl. **28**, 137—149 (1949).
[3] A. Rényi, On the large sieve of Linnik. Compositio Math. 8, 68—75 (1951).
[4] G. J. Rieger, Über die Anzahl der Ideale in einer Idealklasse mod $\mathfrak{f}$ eines algebraischen Zahlkörpers. Math. Ann. **135**, 444—466 (1958).
[5] G. J. Rieger, Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper II. J. reine angew. Math. **201**, 157—171 (1959).

Eingegangen am 16. 10. 1959

Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf partielle Differential-Differenzengleichungen mit mehreren Differenzen

Von JOSEF WLOKA in Heidelberg

In dieser Note wollen wir die Ergebnisse, die wir in [7] für partielle Differential-Differenzengleichungen mit nur einer Differenz erhalten haben, auf partielle Differential-Differenzengleichungen mit beliebig vielen Differenzen übertragen. Dazu ist es notwendig, einen Satz über die algebraische Abgeschlossenheit des Körpers der h-Reihen[1]) zu beweisen. Teil 1 ist dem Beweis dieses Satzes gewidmet, während wir uns in Teil 2 mit der Anwendung der im 1. Teil gewonnenen Ergebnisse auf partielle Differential-Differenzengleichungen beschäftigen. Wir benutzen im folgenden die Bezeichnungen und die Terminologie des Buches [1] und der Arbeit [7].

1. Es seien mit a_i algebraische Funktionen des Differentiationsoperators s bezeichnet; nach [7] bilden die a_i einen algebraisch abgeschlossenen Unterkörper $\boldsymbol{A}$ von $\boldsymbol{M}$ ($\boldsymbol{M}$-Mikusińskischer Operatorenkörper). Wir betrachten die sogenannten h-Reihen[2])

$$(1) \qquad D(h) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i h^{\tau_i}, \quad \tau_i \uparrow \infty\,^{3)}.$$

Wie in [7] bewiesen wurde, sind die Entwicklungen (1) immer konvergent und eindeutig (in $\boldsymbol{M}$). Da sich das Element

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i h^{\tau_i}} = \frac{1}{a_0 h^{\tau_0}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{a_0} h^{\tau_i-\tau_0}\right)} = \frac{1}{a_0 h^{\tau_0}}\left(1-\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{a_0} h^{\tau_i-\tau_0}\right)+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{a_0} h^{\tau_i-\tau_0}\right)^2 \ldots\right)$$

wieder als h-Reihe darstellen läßt, bilden die h-Reihen einen Körper $\boldsymbol{H}$. Wir haben $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{M}$. Wir führen für den Körper $\boldsymbol{H}$ die Exponentenbewertung ein:

$$w(0) = \infty; \quad w(D(h)) = \tau_0, \quad \text{wenn} \quad a_0 \neq 0.$$

Leicht prüft man die Bewertungsaxiome (siehe [5]) nach:

1. $w(0) = \infty$, $w(D(h))$ ist für $D(h) \neq 0$ eine reelle Zahl;
2. $w(D_1 \cdot D_2) = w(D_1) + w(D_2)$;
3. $w(D_1 + D_2) \geqq \min(w(D_1), w(D_2))$.

---

1) Für die Definition der h-Reihen siehe Teil 1.

2) h^{τ} — bedeutet den Verschiebungsoperator, siehe z. B. [1]. (Die τ_i sind hierbei beliebige reelle Zahlen.)

3) $\tau_i \uparrow \infty$ bedeutet, τ_i strebt streng monoton gegen ∞.

Lemma. *Der Körper* $\boldsymbol{H}$ *ist perfekt in bezug auf die eingeführte Exponentenbewertung* (vgl. [3]).

Aus $w(D_m - D_n) \to \infty$ mit $m, n \to \infty$ folgt nämlich, daß für jedes noch so großes T es ein derartiges $N = N(T)$ gibt, daß für $n \geqq N$ in sämtlichen Reihen D_n die Abschnitte

$$\sum_{\tau_i^{(n)} \leqq T} a_i^{(n)} h^{\tau_i^{(n)}}$$

miteinander übereinstimmen. Bilden wir die Summe aller Glieder von der Form $a_i h^{\tau_i}$, die von einem n an in sämtlichen D_n vorkommen, so muß bei monotoner Anordnung $\tau_i \uparrow \infty$ gelten (für jedes T gibt es doch nur endlich viele $\tau_i \leqq T$!) und $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i h^{\tau_i}$ ist offenbar der Grenzwert (im Sinne der Bewertung) der Folge D_n.

Für $\boldsymbol{H}$ gilt also das Henselsche Lemma (Beweis siehe S. 263 [5]), das wir hier in der Sprache der h-Reihen formulieren wollen:

Ist $F(h, z)$ ein Polynom in z der Gestalt

$$F(h, z) = z^n + D_1(h) z^{n-1} + \cdots + D_n(h),$$

dessen Koeffizienten ganze[4]) *Elemente von* $\boldsymbol{H}$ *sind, und zerfällt* $F(0, z)$ *($F(0, z)$ erhält man aus $F(h, z)$, indem man in den Koeffizienten $D_1(h), \ldots, D_n(h)$ einfach alle Glieder mit positiven Potenzen von h fortläßt) in zwei teilerfremde Faktoren der Grade p und q mit $p + q = n$:*

$$F(0, z) = g_0(z) \cdot h_0(z), \quad (g_0(z), h_0(z)) = 1,$$

so zerfällt $F(h, z)$ in zwei Faktoren von denselben Gradzahlen in z

$$F(h, z) = G(h, z) \cdot H(h, z),$$

deren Koeffizienten ebenfalls ganze Elemente von $\boldsymbol{H}$ *sind. Dabei ist*

$$G(0, z) = g_0(z), \quad H(0, z) = h_0(z).$$

Das Henselsche Lemma benutzen wir zum Beweis des folgenden wichtigen Satzes. (Der Beweis — ein Standardbeweis — wird ähnlich wie in [6] und [4] geführt.)

Satz 1. *Es sei*

$$F(h, z) = z^n + D_1(h) z^{n-1} + \cdots + D_n(h) \tag{2}$$

ein Polynom, dessen Koeffizienten ganze Elemente aus $\boldsymbol{H}$ *sind. Dann läßt sich* (2) *in* $\boldsymbol{H}$ *in Linearfaktoren zerlegen; und die Wurzeln von* (2) *sind* ***ganze*** *Elemente aus* $\boldsymbol{H}$.

Beweis. Wir können voraussetzen, daß $D_1 \equiv 0$ ist, anderenfalls wir $z - \frac{1}{n} D_1$ als neue Variable einführen. Die Entwicklung von D_ν beginne mit $a_\nu h^{\tau_\nu}$, $a_\nu \neq 0$, wenn D_ν nicht identisch Null ist. Sind alle $D_\nu \equiv 0$, so ist nichts zu beweisen; sonst sei $\varkappa$ die kleinste unter den Zahlen $\frac{\tau_\nu}{\nu}$ zu $D_\nu \neq 0$. Dann ist offenbar

$$\tau_{\nu_\lambda} - \nu_\lambda \varkappa = 0 \quad \text{für gewisse} \quad \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_l,$$

4) $D(h)$ ist ganz, wenn $w(D) = \tau_0 \geqq 0$.

während sonst $\tau_\nu - \nu\varkappa > 0$ ist. Wir setzen nun $z = z_1 h^\varkappa$; dann verwandelt sich unsere Gleichung (2) (mit $D_1 \equiv 0$!) nach Multiplikation mit $h^{-n\varkappa}$ in

(3) $$z_1^n + D_2(h)\, h^{-2\varkappa} z_1^{n-2} + \cdots + D_\nu(h)\, h^{-\nu\varkappa} z_1^{n-\nu} + \cdots + D_n(h)\, h^{-n\varkappa}.$$

Die Entwicklung des Produktes $D_\nu(h)\, h^{-\nu\varkappa}$ beginnt nunmehr mit $a_\nu h^{\tau_\nu - \nu\varkappa}$, und dies reduziert sich auf $a_\nu \neq 0$ für $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$. Ist δ die kleinste unter den übrigen Differenzen $\tau_\nu - \nu\varkappa$, so läßt sich unsere Gleichung (3) in der Form schreiben

(4) $$F_1(h, z_1) = z_1^n + a_{\nu_1} z_1^{n-\nu_1} + \cdots + a_{\nu_l} z^{n-\nu_l} + h^\delta \Psi(h, z_1) = F_1(0, z_1) + h^\delta \Psi(h, z_1),$$

wobei die Koeffizienten von $F_1(0, z_1)$ in $\boldsymbol{A}$ liegen und $\Psi(h, z_1)$ ein Polynom in z_1 ist mit ganzen Koeffizienten aus $\boldsymbol{H}$. Da das Polynom $F_1(0, z_1)$ aus wenigstens zwei Gliedern besteht und der Koeffizient bei z_1^{n-1} gleich Null ist, besitzt dieses Polynom wenigstens zwei verschiedene Wurzeln. (Die Charakteristik von $\boldsymbol{A}$ ist gleich Null!)

Wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von $\boldsymbol{A}$ läßt sich deshalb $F_1(0, z_1)$ in zwei teilerfremde Faktoren von den Graden $p > 0$ und $q > 0$ mit $p + q = n$ zerlegen. Nach dem Henselschen Lemma zerfällt $F_1(h, z_1)$ ebenfalls in zwei Faktoren von denselben Gradzahlen in z_1
$$F_1(h, z_1) = G_1(h, z_1) \cdot H(h, z_1),$$
deren Koeffizienten ganze Elemente in $\boldsymbol{H}$ sind.

Wenden wir auf die beiden Faktoren dieselbe Überlegung an, so können wir auch diese Faktoren weiter zerlegen und so fortfahren, bis die Zerlegung von (2) in Linearfaktoren vollzogen ist. Die Ganzheit der Wurzeln von (2) folgt daraus, daß — wie man sich leicht überzeugt — bei den hier angewandten Substitutionen der Ganzheitscharakter gewahrt bleibt.

Als Folgerung aus Satz 1 erhalten wir:

Satz 2. *Der Körper* $\boldsymbol{H}$ *ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. Es sei

(5) $$F(h, z) = D_0(h)\, z^n + D_1(h)\, z^{n-1} + \cdots + D_n(h)$$

ein Polynom in z mit Koeffizienten aus $\boldsymbol{H}$, $D_0 \neq 0$. Durch Division mit h^τ (τ ist der kleinste in (5) vorkommende Exponent von h), Substitution $z' = D_0 z$ und Multiplikation mit D_0^{n-1} können wir (5) in die Form (2) bringen und Satz 1 anwenden.

2. Die im 1. Teil bewiesenen Sätze sollen uns dazu dienen, die in [7] entwickelte Theorie auf Differential-Differenzengleichungen mit mehreren Differenzen auszudehnen.

Es sei die partielle lineare Differential-Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben:

(1) $$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda t)}{\partial\lambda^\mu\, \partial t^\nu} + \sum_{k=1}^{d} \sum_{\mu=0}^{m_k} \sum_{\nu=0}^{n_k} \beta_{\mu\nu}^{k} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t - \tau_k)}{\partial\lambda^\mu\, \partial t^\nu} = \varphi(\lambda, t)$$

($\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, $0 \leqq t < \infty$, $\tau_k > 0$ für $k = 1, 2, \ldots, d$; und $x(\lambda, t) = 0$ für $t < 0$).

Bei Anwendung der Operatorenrechnung (siehe Formel II (3) in [7]) geht obige Gleichung in die folgende Operatorendifferentialgleichung über:

$$\sum_{\mu=0}^{m} w_\mu(s)\, x^{(\mu)} + \sum_{k=1}^{d} h^{\tau_k} \sum_{\mu=0}^{m_k} u_\mu^k(s)\, x^{(\mu)} = f(\lambda). \tag{2}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} w_\mu(s) &= \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu}\, s^\nu, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, m; \\ a_\mu^k(s) &= \sum_{\nu=0}^{n_k} \beta_{\mu\nu}^k\, s^\nu, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, m_k, \; k = 1, \ldots, d, \end{aligned} \tag{3}$$

und

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \{\varphi(\lambda, t)\} &+ \sum_{\varkappa=0}^{n-1} s^{n-\varkappa-1} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu\, \partial t^\nu} + \\ &+ \sum_{k=1}^{d} h^{\tau_k} \sum_{\varkappa=0}^{n_k-1} s^{n_k-\varkappa-1} \sum_{\mu=0}^{m_k} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \beta_{\mu, n_k-\varkappa+\nu}^k \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu\, \partial t^\nu}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir betrachten die charakteristische Gleichung von (2)

$$\sum_{i=0}^{M} \left[\tilde{w}_i(s) + \sum_{k=1}^{d} h^{\tau_k} \tilde{u}_i^k(s) \right] v^i = 0, \tag{5}$$

wobei $M = \max(m, m_1, \ldots, m_d)$ und

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i &= w_i \text{ für } i \leq m, & \tilde{u}_i^k &= u_i^k \text{ für } i \leq m_k, \\ \tilde{w}_i &= 0 \text{ für } i > m, & \tilde{u}_i^k &= 0 \text{ für } i > m_k, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, d.$$

Da wegen Satz 2 die charakteristische Gleichung in $\boldsymbol{H}$ — also auch in $\boldsymbol{M}$ — in so viele Linearfaktoren, wie ihr Grad beträgt, zerfällt, kann man auf die Gleichungen (1) die Mikusińskische Differentialgleichungstheorie [2] anwenden. Damit kann man die Gleichungen (1) in reine ($N = 0$), gemischte ($0 < N < M$) und logarithmische ($N = M$)[5]) Gleichungen klassifizieren, und wir können — wie für Gleichungen mit nur einer Differenz — Eindeutigkeitsbedingungen angeben. So gilt z. B. (siehe [2] und [7]):

Satz 3. *Es sei die Gleichung* (1) *gegeben, und die Lösung* $x(\lambda, t)$ *sowie ihre Ableitungen*

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial t^\nu\, \partial \lambda^\mu} \quad (\mu = 0, \ldots, \max(m, m_1, \ldots, m_d); \quad \nu = 0, \ldots, \max(n, n_1, \ldots n_d))$$

genügen derartigen Stetigkeitsbedingungen, daß die Formel

$$\frac{\partial^i x(\lambda, t)}{\partial t^i} = s^i x(\lambda, t) - s^{i-1} x(\lambda_1 + 0) - \cdots - \left.\frac{\partial^{i-1} x(\lambda, t)}{\partial t^{i-1}}\right|_{t=+0}$$

gültig ist. Wir nehmen an, daß unter den $\max(m, m_1, \ldots m_d) = M$ *Wurzeln der charak-*

5) Für die Bedeutung von N und M siehe Satz 3.

teristischen Gleichung (5) *genau* N *Logarithmen vorkommen. Dann bestimmen die Bedingungen*

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{m-\varkappa+\mu,\nu}\,h_\mu^{(\nu)}(\lambda)=g_\varkappa(\lambda)\qquad(\varkappa=0,\ldots,m-1),\\ &\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n_k}\beta^k_{m_k-\varkappa+\mu,\nu}\,h_\mu^{(\nu)}(\lambda)=g^k_\varkappa(\lambda)\qquad(\varkappa=0,\ldots,m_k-1;\ k=1,\ldots,d);\end{aligned}$$

$$\text{(R)}\quad \left.\frac{\partial^\varkappa x(\lambda,t)}{\partial\lambda^\varkappa}\right|_{\lambda=\lambda_0}=v_\varkappa(t)\qquad(\lambda_1\leqq\lambda_0\leqq\lambda_2,\quad\varkappa=0,\ldots,N-1),$$

wobei $g_\varkappa(\lambda)$, $g^k_\varkappa(\lambda)$ *und* $v_\varkappa(t)$ *gegebene Funktionen sind, und* $h_\varkappa(\lambda)=\left.\frac{\partial^\varkappa x(\lambda,t)}{\partial t^\varkappa}\right|_{t=+0}$, die *Lösung der Gleichung* (1) *eindeutig (falls eine Lösung existiert).*

Auch der Satz III. 3b von [7] hat sein Analogon, das wir aber hier nicht anführen wollen.

Da für die Elemente aus $\boldsymbol{H}$ das folgende Logarithmenkriterium gilt, können wir die Klassifikation der Gleichungen (1) effektiv durchführen und die Lösungen von (1) explicite hinschreiben.

Der Operator $\sum_{i=0}^{\infty}a_i(s)h^{\tau_i}$, $\tau_i\uparrow\infty$ *ist dann und nur dann ein Logarithmus, wenn* $\tau_0=0$ *und wenn* $a_0(s)$ *ein Logarithmus ist.*

(Dieses Kriterium beweist man so — mit einigen geringfügigen Änderungen — wie Satz III.2 in [7].)

Dieses Kriteriums wegen lassen sich die Sätze III.4—6 von [7] auch auf die Gleichungen (1) übertragen. Hier wollen wir nur den, dem Satz III.4 von [7] analogen Satz formulieren und beweisen.

Satz 4. *Es sei* $m\geqq m_k$ *für* $k=1,\ldots,d$. *Die Gleichung* (1) *ist dann und nur dann* 1) *logarithmisch,* 2) *gemischt oder* 3) *rein, wenn die Gleichung*

$$\text{(6)}\qquad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,t)}{\partial\lambda^\mu\,\partial t^\nu}=0$$

(genannt Hauptteil von (1)*) dieselbe Eigenschaft hat.*

Beweis. Da $m\geqq m_k$ ist, hat der höchste Koeffizient der charakteristischen Gleichung (5) die Form

$$w_m(s)+\sum_{k=1}^{d}h^{\tau_k}u^k_m(s),$$

wobei $w_m(s)\neq 0$. Falls wir die Gleichung (5) durch diesen höchsten Koeffizienten teilen, erhalten wir eine Gleichung der Form 1.(2) mit ganzen Koeffizienten, wir können also Satz 1 anwenden und sehen, daß (5) nur ganze Elemente $\sum_{i=0}^{\infty}a_i(s)h^{\tau_i}$ aus $\boldsymbol{H}$ als Wurzeln hat. Wegen $w_m(s)\neq 0$ können wir $\tau_0=0$ setzen und $a_0(s)$ ist die Wurzel der charakteristischen Gleichung (6). Das oben formulierte Logarithmenkriterium beendet den Beweis.

Literaturverzeichnis

[1] J. MIKUSIŃSKI, Operational calculus. New York-Warszawa 1959.
[2] J. MIKUSIŃSKI, Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leur applications aux équations aux dérivees partielles classiques. Studia Math. **12**, 227—270 (1951).
[3] A. OSTROWSKI, Algebraische Funktionen von Dirichletschen Reihen. Math. Z. **37**, 98—133 (1933).
[4] A. OSTROWSKI, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. Math. Z. **39**, 269—404 (1935).
[5] B. L. v. D. WAERDEN, Algebra I. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[6] B. L. v. D. WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin 1939.
[7] J. WLOKA, Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. J. reine angew. Math. **202**, 107—128 (1960).

Eingegangen am 1. 10. 1959

Eine Verallgemeinerung der Sphäroidfunktionen

Von ALFRED LEITNER*) und JOSEF MEIXNER in Aachen

1. Einleitung. Die Sphäroidfunktionen sind Lösungen der Differentialgleichung

$$(1)\qquad (\xi^2-1)\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}+2\xi\frac{d\Psi}{d\xi}+\left[-\Lambda-\frac{\mu^2}{\xi^2-1}-\gamma^2+\gamma^2\xi^2\right]\Psi=0\,.$$

Λ, μ, γ sind Parameter, welche beliebige reelle oder komplexe Werte annehmen dürfen. Die Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen ergibt sich, wenn man die dreidimensionale Schwingungsgleichung $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ in den Koordinaten des verlängerten oder abgeplatteten Rotationsellipsoids separiert.

Viele Eigenschaften der Sphäroidfunktionen, insbesondere Reihenentwicklungen und Integralrelationen hängen eng damit zusammen, daß die dreidimensionale Schwingungsgleichung sowohl in Kugelkoordinaten als auch in den Koordinaten des Rotationsellipsoids separierbar ist. Man kann daher vermuten, daß man auch für allgemeinere Funktionen, die bei der Separation einer verallgemeinerten Schwingungsgleichung

$$(2)\qquad \nabla^2 u + \Phi(x, y, z)u = 0$$

in den Koordinaten des Rotationsellipsoids entstehen, unmittelbar eine Reihe von Eigenschaften angeben kann, falls diese Schwingungsgleichung auch in Kugelkoordinaten separierbar ist.

Die simultane Separierbarkeit von (2) in Kugelkoordinaten und in den Koordinaten des Rotationsellipsoids mit gleichem Koordinatenmittelpunkt ist dann und nur dann möglich, wenn $\Phi(x, y, z)$ die Gestalt hat[1])

$$(3)\qquad \Phi(x, y, z) = k^2 + d(x^2+y^2+z^2) + \frac{c}{x^2+y^2} + \frac{e}{z^2}\,.$$

Der glückliche Umstand hierbei ist, daß mit dieser Funktion $\Phi(x, y, z)$ die Separation von (2) in Kugelkoordinaten auf einfache Funktionen, nämlich solche hypergeometrischen Typs — Konfluenz mit eingeschlossen — führt. Dies ermöglicht die Entwicklung der Funktionen, die bei der Separation von (2) in den Koordinaten des Rotationsellipsoids entstehen, nach hypergeometrischen Funktionen und die Aufstellung von Integralbeziehungen zwischen diesen Funktionen, deren Kern hypergeometrische Funktionen enthält.

---

*) On leave from Department of Physics, Michigan State University, East Lansing, Mich., U.S.A.

1) A. LEITNER und J. MEIXNER, Simultane Separierbarkeit von verallgemeinerten Schwingungsgleichungen. Arch. Math. 10, 387—391 (1959).

Wir beschränken uns hier auf den Fall $d = 0$ und — ohne weiteren Verlust an Allgemeinheit — auf $c = 0$. Damit lautet die verallgemeinerte Schwingungsgleichung (2) in cartesischen Koordinaten mit $e = -\lambda(\lambda + 1)$

$$\nabla^2 u + \left(k^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{z^2}\right) u = 0 . \tag{4}$$

In den Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta \tag{5}$$

besitzt sie separierte Lösungen der Gestalt — wir setzen $\cos\vartheta = v$ —

$$u = \psi_\nu^{(j)}(kr)\, \tilde{\varphi}_\nu^{\mu,\lambda}(v)\, e^{i\mu\varphi} . \tag{6}$$

Die Funktionen $\psi_\nu^{(j)}(kr)$ sind für $j = 1, 2, 3, 4$ der Reihe nach die sogenannten Kugel-Bessel-, Kugel-Neumann- und Kugel-Hankel-Funktion:

$$\psi_\nu^{(j)}(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} Z_{\nu+1/2}^{(j)}(kr) \quad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{7}$$

worin die $Z_{\nu+1/2}^{(j)}$ die entsprechenden Zylinderfunktionen sind. Die Funktionen $\tilde{\varphi}_\nu^{\mu,\lambda}(v)$ sind Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 - v^2)\frac{d^2\tilde{\varphi}}{dv^2} - 2v\frac{d\tilde{\varphi}}{dv} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-v^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{v^2}\right]\tilde{\varphi} = 0. \tag{8}$$

Sie lassen sich durch hypergeometrische Funktionen ausdrücken. Wir legen folgende Lösungen $\tilde{\varphi}$ durch besondere Bezeichnungen fest (siehe auch LEITNER und MEIXNER[2]))

$$\tilde{Q}_\nu^{\mu,\lambda}(v) = \frac{\pi^{1/2}(v^2-1)^{\mu/2}\, v^{-\mu-\nu-1}}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu+3/2)}\, {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}, \frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{v^2}\right), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_\nu^{\mu,\lambda}(v) = {}& \frac{\pi\, e^{-\mu\pi i}\,(1-v^2)^{-\mu/2}\, v^{\lambda+1}}{2^{\nu+1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma(1-\mu)} \times \\ & \times {}_2F_1\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2}, \frac{-\nu-\mu+\lambda+1}{2}; 1-\mu; 1-v^2\right),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_\nu^{\mu,\lambda}(v) = {}& \frac{\pi\, e^{i\pi(\nu-\mu-\lambda-1)/2}\,(1-v^2)^{-\mu/2}\, v^{\lambda+1}}{2^{\nu+1}\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)} \times \\ & \times {}_2F_1\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2}, \frac{-\nu-\mu+\lambda+1}{2}; \lambda+\frac{3}{2}; v^2\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Ferner definieren wir eine Funktion $\tilde{P}_\nu^{\mu,\lambda}(v)$ durch den Ausdruck, der aus (10) hervorgeht, wenn man $(1 - v^2)^{-\mu/2}$ durch $(v^2 - 1)^{-\mu/2}$ ersetzt.

In den Koordinaten des Rotationsellipsoids

$$x = a\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi, \quad y = a\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi, \quad z = a\xi\eta \tag{12}$$

gibt es ebenfalls separierte Lösungen von (2) mit der φ-Abhängigkeit $\exp(i\mu\varphi)$ wie in (6). Die anderen beiden Faktoren sind Funktionen von ξ bzw. von η. Sie genügen der-

[2]) A. LEITNER und J. MEIXNER, Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen. Arch. Math. **10**, 452—459 (1959).

selben Differentialgleichung

$$(13)\qquad (\xi^2-1)\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}+2\xi\frac{\lambda\Psi}{d\xi}+\left[-\Lambda-\frac{\mu^2}{\xi^2-1}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{\xi^2}-\gamma^2+\gamma^2\xi^2\right]\Psi=0,$$

in welcher im zweiten Fall η statt ξ zu lesen ist. Λ und μ sind Separationsparameter, $\gamma = ka$.

Für $\lambda = 0$ oder -1 ist (13) die Sphäroiddifferentialgleichung. Ihre Lösungen sind ausführlich untersucht. Eine Darstellung ihrer Theorie findet sich bei MEIXNER und SCHÄFKE[3]). Mit $\lambda(\lambda+1) \neq 0$ scheint zwar eine Komplikation einzutreten; tatsächlich ist sie kaum größer als beim Übergang von den Kugelfunktionen mit zwei Parametern zu den hypergeometrischen Funktionen mit drei Parametern. Überdies ist diese Verallgemeinerung (13) der Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen eine sehr natürliche, bringt sie doch eine zusätzliche Symmetrie neben der Spiegelsymmetrie $\xi \to -\xi$. Setzt man nämlich

$$(14)\qquad \xi=\sqrt{1-x^2},\quad \Psi(\xi)=(x^2-1)^{1/4}x^{-1/2}\,\overline{\Psi}(x),$$

so ergibt sich für $\overline{\Psi}(x)$ eine Differentialgleichung derselben Gestalt

$$(15)\qquad (x^2-1)\frac{d^2\overline{\Psi}}{dx^2}+2x\frac{d\overline{\Psi}}{dx}+\left[-\overline{\Lambda}-\frac{\overline{\mu}^2}{x^2-1}+\frac{\overline{\lambda}(\overline{\lambda}+1)}{x^2}-\overline{\gamma}^2+\overline{\gamma}^2x^2\right]\overline{\Psi}=0,$$

wobei

$$(16)\qquad \overline{\Lambda}=\Lambda+\gamma^2,\quad \overline{\gamma}^2=-\gamma^2,\quad \overline{\mu}^2=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2,\quad \left(\overline{\lambda}+\frac{1}{2}\right)^2=\mu^2.$$

Das heißt, mit $\Psi(\Lambda,\mu,\lambda,\gamma,\xi)$ ist auch

$$(17)\qquad \xi^{1/2}(\xi^2-1)^{-1/4}\,\Psi\left(\Lambda+\gamma^2,\pm\left(\lambda+\frac{1}{2}\right),\pm\mu-\frac{1}{2},\pm i\gamma,\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

eine Lösung von (13), wobei die Vorzeichenkombinationen voneinander unabhängig sind.

Wir werden im folgenden Reihenentwicklungen der Lösungen von (13) geben und das sogenannte Eigenwertproblem für kleine und große reelle Werte von $\pm\gamma^2$ untersuchen. Die Methoden sind von der Theorie der Sphäroidfunktionen her vorgezeichnet und unmittelbar übertragbar. Wir werden uns daher in der folgenden Darstellung kurz fassen und verweisen wegen der genaueren Begründung einzelner Schritte auf MEIXNER und SCHÄFKE[3]). Der äußere Anlaß dieser Untersuchung war das Auftreten der Differentialgleichung (13) (mit $\mu = 0$) in einer Arbeit von FRAHN und LEMMER[4]) über die Schrödingersche Wellengleichung mit nicht-lokaler harmonischer Wechselwirkung.

An anderer Stelle sollen Integralbeziehungen und viele weitere Eigenschaften der verallgemeinerten Sphäroidfunktionen gegeben werden.

---

[3]) J. MEIXNER und F. W. SCHÄFKE, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 71, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.

[4]) W. E. FRAHN and R. H. LEMMER, Velocity-Dependent Nuclear Interaction. Nuovo Cim. X, 5, 1564—1572 (1957); Non-Static Effects on Individual Nucleons in a Spheroidal Potential. Nuovo Cim. X, 6, 664—673 (1957).

2. Reihenentwicklungen der verallgemeinerten Sphäroidfunktionen nach Zylinder- und hypergeometrischen Funktionen. Wegen der simultanen Separierbarkeit in beiden Koordinatensystemen (5) und (12) erwarten wir, daß die in ξ, η, φ separierten Lösungen sich nach den in r, $v = \cos\vartheta, \varphi$ separierten Lösungen entwickeln lassen. Wir machen daher einen Ansatz

$$\Psi = \sum_t \alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t}(\gamma^2)\, \psi^{(j)}_{\nu+2t}(kr)\, \tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu+2t}(v) \tag{18}$$

und versuchen die Koeffizienten $\alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t}$ so zu bestimmen, daß Ψ, als Funktion von ξ bzw. η betrachtet, der Differentialgleichung (13) in ξ bzw. in η genügt. Dazu sind dann r und v durch ξ und η auszudrücken:

$$r^2 = a^2(\xi^2 + \eta^2 - 1), \quad rv = a\xi\eta, \quad r^2(1 - v^2) = a^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\,. \tag{19}$$

Die Größe ν bleibt dabei zunächst unbestimmt.

Ohne in Einzelheiten einzugehen, bemerken wir, daß nach Einsetzen von (18) in (13), nach Beseitigung der zweiten Ableitungen von $\psi^{(j)}_{\nu+2t}$ und $\tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu+2t}$ mittels der Differentialgleichungen, denen diese Funktionen genügen, nach Beseitigung der ersten Ableitungen und der von r und v abhängenden Koeffizienten mittels der Rekursionsformeln der Funktionen $\psi^{(j)}_{\nu+2t}$ und $\tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu+2t}$ aus $\psi^{(j)}_{\nu+2t}(kr)\, \tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu}(v)$ in (18) ein Ausdruck entsteht, der die drei Funktionen $\psi^{(j)}_{\nu+2t+l}(kr)\, \tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu+2t+l}(v)$ mit $l = -2, 0, 2$ und mit konstanten Koeffizienten enthält. Verschiebung des Summationsindex t um $-1, 0, 1$ führt dann auf eine Gleichung der Gestalt

$$\sum_r c^{\mu,\lambda}_{\nu,2t}(\gamma^2)\, \psi^{(j)}_{\nu+2t}(kr)\, \tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu+2t}(v) = 0\,.$$

Hinreichend für das Bestehen dieser Gleichung ist $c^{\mu,\lambda}_{\nu,2t} = 0$ oder, in den Koeffizienten ausgedrückt,

$$\begin{aligned}
&\gamma^2 \frac{(\nu+2t+\mu-\lambda-1)(\nu+2t-\mu-\lambda-1)(\nu+2t+\mu+\lambda)(\nu+2t-\mu+\lambda)}{(2\nu+4t-3)(2\nu+4t-1)}\, \alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t+2}(\gamma^2) + \\
&+ \left[\Lambda - (\nu+2t)(\nu+2t+1) + 2\gamma^2 \frac{(\nu+2t)(\nu+2t+1)+\mu^2-\lambda(\lambda+1)-1}{(2\nu+4t-1)(2\nu+4t+3)}\right] \alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t}(\gamma^2) + \\
&+ \frac{\gamma^2}{(2\nu+4t+3)(2\nu+4t+5)}\, \alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t+2}(\gamma^2) = 0 \qquad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).
\end{aligned} \tag{20}$$

Wir schließen verschwindende Nenner aus, indem wir annehmen, daß $\nu \neq \frac{1}{2} \pmod 1$ ist.

3. Die Rekursion der Entwicklungskoeffizienten. Für $\gamma = 0$ nimmt die Rekursion die einfache Gestalt $[\Lambda - (\nu + 2t)(\nu + 2t + 1)]\, \alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t} = 0$ an. Damit eine nichttriviale Lösung existiert, muß $\Lambda = (\nu + 2t_0)(\nu + 2t_0 + 1)$ mit irgendeiner ganzen Zahl t_0 sein. Daraus folgt, daß der bisher verfügbare Parameter ν nicht frei, sondern durch Λ weitgehend bestimmt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir $\Lambda = \nu(\nu + 1)$ für $\gamma^2 = 0$ setzen.

Für $\gamma^2 \neq 0$ bricht die Folge der $\alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t}$ nicht nach links ab, wenn wir die triviale Lösung $\alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t} = 0$ für alle t ausschließen. Es gilt für jede nichttriviale Lösung von (20)

$$\frac{\alpha_{2t-2}}{\alpha_{2t}} \to \frac{4}{\gamma^2} \quad \text{für } t \to -\infty \tag{21}$$

oder

$$\frac{\alpha_{2t-2}}{\alpha_{2t}} \to \frac{\gamma^2}{64t^4} \quad \text{für } t \to -\infty\,. \tag{22}$$

Wir verstehen im folgenden unter $\alpha_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$ die bis auf einen Faktor bestimmte Lösung von (20) mit dem infinitären Verhalten (22).

Ist $\gamma \neq 0$ und ist für kein t

$$\nu = -2t \pm \mu + \lambda + 1 \quad \text{oder} \quad \nu = -2t \pm \mu - \lambda\,, \tag{23}$$

so bricht keine Lösung von (20) nach rechts ab. Es gilt dann für jede nichttriviale Lösung

$$\frac{\alpha_{2t+2}}{\alpha_{2t}} \to \frac{\gamma^2}{4} \quad \text{für } t \to +\infty \tag{24}$$

oder

$$\frac{\alpha_{2t+2}}{\alpha_{2t}} \to \frac{64t^4}{\gamma^2} \quad \text{für } t \to +\infty\,. \tag{25}$$

Wir legen der durch das Verhalten (22) bestimmten Lösung noch die Bedingung (24) oder in den Fällen (23) die Bedingung des Abbrechens auf. Damit erzwingen wir einen Zusammenhang zwischen ν und Λ. Wir denken uns im folgenden ν vorgegeben und $\Lambda = \Lambda_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$ durch diese Bedingung und durch $\Lambda_\nu^{\mu,\lambda}(0) = \nu(\nu+1)$ bestimmt.

Man kann aus (20) in bekannter Weise eine Kettenbruchgleichung für Λ gewinnen, die im allgemeinen zwei unendliche Kettenbrüche enthält. Sie sind wegen (22) und (24) bzw. (23) konvergent. Diese Gleichung läßt sich in einer Umgebung von $\gamma^2 = 0$ nach $\Lambda_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$ als konvergente Potenzreihe in γ^2 auflösen. Durch analytische Fortsetzung mit geeigneten Verzweigungsschnitten ist dann $\Lambda_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$ in der ganzen komplexen γ^2-Ebene eindeutig definiert. Als erste Entwicklungsglieder erhält man

$$\begin{aligned}\Lambda_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2) &= \nu(\nu+1) - 2\gamma^2\frac{\nu(\nu+1)+\mu^2-\lambda(\lambda+1)-1}{(2\nu-1)(2\nu+3)} + \\ &+ \frac{1}{2}\gamma^4\left[\frac{(\nu+\mu+\lambda)(\nu-\mu+\lambda)(\nu+\mu-\lambda-1)(\nu-\mu-\lambda-1)}{(2\nu-3)(2\nu-1)^3(2\nu+1)} - \right.\\ &\left. - \frac{(\nu-\mu-\lambda+1)(\nu+\mu-\lambda+1)(\nu-\mu+\lambda+2)(\nu+\mu+\lambda+2)}{(2\nu+1)(2\nu+3)^3(2\nu+5)}\right] + \cdots.\end{aligned} \tag{26}$$

Man liest aus der Kettenbruchgleichung unmittelbar ab, daß

$$\Lambda_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = \Lambda_{-\nu-1}^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = \Lambda_\nu^{-\mu,\lambda}(\gamma^2) = \Lambda_\nu^{\mu,-\lambda-1}(\gamma^2)\,.$$

Ferner liest man aus der Rekursion ab, daß mit $\alpha_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$ auch $\alpha_{\nu,2t}^{-\mu,\lambda}(\gamma^2)$, $\alpha_{\nu,2t}^{\mu,-\lambda-1}(\gamma^2)$ und nach Multiplikation mit dem Faktor

$$2^{4t}\,\Gamma\left(\frac{\nu+2t+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2t-\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2t+\mu-\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2t-\mu-\lambda+1}{2}\right)$$

auch $\alpha_{-\nu-1,-2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$ Lösungen derselben mit den Eigenschaften (22) und (24) sind. Dies erlaubt uns die Verabredung

$$\alpha_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = \alpha_{\nu,2t}^{\mu,-\lambda-1}(\gamma^2) = \alpha_{\nu,2t}^{-\mu,\lambda}(\gamma^2) =$$

$$(27)\quad = \frac{2^{4t}\,\Gamma\left(\frac{\nu+2t+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2t-\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2t+\mu-\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2t-\mu-\lambda-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2}\right)}\,\alpha_{-\nu-1,-2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2).$$

Indem wir

$$(28)\qquad \alpha_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = 2^{2t}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2t+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2t+\mu-\lambda+1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)}\,a_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$$

setzen, bringen wir die Rekursion (20) in eine symmetrische Form

$$\gamma^2\frac{(\nu+2t-\mu-\lambda-1)\,(\nu+2t-\mu+\lambda)}{(2\nu+4t-3)\,(2\nu+4t-1)}\,a_{\nu,2t-2}^{\mu,\lambda}(\gamma^2) +$$
$$(29)\quad +\left[\Lambda-(\nu+2t)\,(\nu+2t+1)+2\gamma^2\frac{(\nu+2t)(\nu+2t+1)+\mu^2-\lambda(\lambda+1)-1}{(2\nu+4t-1)\,(2\nu+4t+3)}\right]a_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2) +$$
$$+\gamma^2\frac{(\nu+2t+\mu-\lambda+1)\,(\nu+2t+\mu+\lambda+2)}{(2\nu+4t+3)\,(2\nu+4t+5)}\,a_{\nu,2t+2}^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = 0$$

mit $a_{-\nu-1,-2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = a_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$.

Es gilt $a_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = 0$, wenn

(30) $\nu+2t+\mu-\lambda = -1, -3, -5, \ldots$ und $\nu+\mu-\lambda = 1, 3, 5, \ldots,$
$\nu+\mu+\lambda \neq -2, -4, -6, \ldots,$

oder wenn

(31) $\nu+2t+\mu+\lambda = -2, -4, -6, \ldots$ und $\nu+\mu+\lambda = 0, 2, 4, \ldots,$
$\nu+\mu-\lambda \neq -1, -3, -5, \ldots,$

oder wenn

(32) $\nu+2t-\mu+\lambda = 0, 2, 4, \ldots$ und $\nu-\mu+\lambda = -2, -4, -6, \ldots,$
$\nu-\mu-\lambda \neq 1, 3, 5, \ldots,$

oder wenn

(33) $\nu+2t-\mu-\lambda = 1, 3, 5, \ldots$ und $\nu-\mu-\lambda = -1, -3, -5, \ldots,$
$\nu-\mu+\lambda \neq 0, 2, 4, \ldots.$

In den ersten beiden Fällen bricht die Folge der $a_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}$ nach links, in den anderen beiden Fällen nach rechts ab.

4. Spezielle Reihenentwicklungen. Mit dem oben entwickelten Koeffizientensatz $\alpha_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)$ ist die Reihe (18) für $\left|v \pm \sqrt{v^2-1}\right| \leqq |r/a|$ absolut und gleichmäßig konvergent. Dies folgt aus dem Koeffizientenverhalten (22) und (24), aus dem bekannten Verhalten der Funktionen $\psi_{\nu+2t}^{(j)}(kr)$ für $t \to \pm\infty$ und aus dem infinitären Verhalten

der Funktionen $\tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu+2t}(v)$ für $t \to \pm\infty$, welches man mittels der Sätze von KREUSER[5]) aus den Rekursionen (9), (10) in der vorhergehenden Notiz[2]) ablesen kann.

Bevor wir den Wert der Reihe (18) angeben, bemerken wir, daß (13) für $\Lambda = \Lambda^{\mu,\lambda}_\nu(\gamma^2)$ zwei linear unabhängige Lösungen mit dem asymptotischen Verhalten

$$S^{\mu,\lambda(3)}_\nu(\xi;\gamma) \sim \frac{1}{\gamma\xi} e^{i\left(\gamma\xi - \frac{\nu+1}{2}\pi\right)} \quad (-\pi < \arg\xi < 2\pi)\,, \tag{34}$$

$$S^{\mu,\lambda(4)}_\nu(\xi;\gamma) \sim \frac{1}{\gamma\xi} e^{-i\left(\gamma\xi - \frac{\nu+1}{2}\pi\right)} \quad (-2\pi < \arg\xi < \pi) \tag{35}$$

besitzt. Wir definieren zwei weitere Lösungen durch

$$S^{\mu,\lambda\binom{3}{4}}_\nu(\xi;\gamma) = S^{\mu,\lambda(1)}_\nu(\xi;\gamma) \pm i\, S^{\mu,\lambda(2)}_\nu(\xi;\gamma)\,. \tag{36}$$

Man erkennt sofort, daß

$$S^{\mu,\lambda(j)}_\nu(\xi;\gamma) = S^{-\mu,\lambda(j)}_\nu(\xi;\gamma) = S^{\mu,-\lambda-1(j)}_\nu(\xi;\gamma) \quad (j = 1,2,3,4)\,, \tag{37}$$

$$S^{\mu,\lambda\binom{3}{4}}_\nu(\xi;\gamma) = e^{\mp i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} S^{\mu,\lambda\binom{3}{4}}_{-\nu-1}(\xi;\gamma)\,. \tag{38}$$

Die Reihe (18) stellt, als Funktion von ξ betrachtet, eine Linearkombination von zwei linear unabhängigen dieser Lösungen dar. Um zu erfahren, um welche Linearkombination es sich handelt, untersuchen wir die Reihensumme in (18) für festes η mit $\xi \to \infty$. Nach (19) wird somit $r \to \xi$, $v \to \eta$. Man darf dann nach MEIXNER[6]) die Funktionen $\psi^{(j)}_{\nu+2t}(kr)$ durch ihre asymptotische Darstellung ersetzen und erhält für die Reihensumme

$$\sim \psi^{(j)}_\nu(\gamma\xi) \sum_{t=-\infty}^{\infty} (-1)^t \alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2t}(\gamma^2)\, \tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu+2t}(\eta)\,.$$

Das asymptotische Verhalten von $\psi^{(j)}_\nu(\gamma\xi)$ ist aber gleich dem von $S^{\mu,\lambda(j)}_\nu(\xi;\gamma)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. Somit erhalten wir für $\left|v \pm \sqrt{v^2-1}\right| < |r/a|$ oder in ξ, η ausgedrückt, für $\left|\xi\eta \mp \sqrt{(\xi^2-1)(\eta^2-1)}\right| > 1$, falls der dadurch gekennzeichnete Bereich unbeschränkte Werte von ξ enthält,

$$S^{\mu,\lambda(j)}_\nu(\xi;\gamma)\, \widetilde{\varphi s}^{\mu,\lambda}_\nu(\eta;\gamma^2) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \alpha^{\mu,\lambda}_{\nu,2k}(\gamma^2)\, \psi^{(j)}_{\nu+2t}(kr)\, \tilde{\varphi}^{\mu,\lambda}_{\nu+2t}(v)\,. \tag{39}$$

Aus Symmetriegründen genügt auch die mit dieser Gleichung definierte Funktion $\widetilde{\varphi s}^{\mu,\lambda}_\nu(\eta;\gamma^2)$ der Differentialgleichung (13); r und v sind ja symmetrische Funktionen von ξ, η. Damit sind also vier verallgemeinerte Sphäroidfunktionen

$$\widetilde{\varphi s}^{\mu,\lambda}_\nu(\eta;\gamma^2) = \widetilde{Qs}^{\mu,\lambda}_\nu(\eta;\gamma^2),\quad \widetilde{Ps}^{\mu,\lambda}_\nu(\eta;\gamma^2),\quad \widetilde{ps}^{\mu,\lambda}_\nu(\eta;\gamma^2),\quad \widetilde{rs}^{\mu,\lambda}_\nu(\eta;\gamma^2)$$

definiert, wenn für $\tilde{\varphi}$ der Reihe nach $\tilde{Q}$, $\tilde{P}$, $\tilde{p}$, $\tilde{r}$ gesetzt wird. Sie besitzen die Reihen-

---

5) P. KREUSER, Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Diss. Tübingen, Borna-Leipzig 1914.

6) J. MEIXNER, Über das asymptotische Verhalten von Funktionen, die durch Reihen nach Zylinderfunktionen dargestellt werden. Math. Nachrichten 3, 9 (1949).

entwicklung

$$\widetilde{\varphi s}_\nu^{\mu,\lambda}(\eta;\gamma^2) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} (-1)^t \alpha_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)\, \tilde{\varphi}_{\nu+2t}^{\mu,\lambda}(\eta)\,. \tag{40}$$

Man überzeugt sich leicht, daß sie in jedem Fall für alle endlichen $\eta \neq 0, \pm 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Setzt man in (40) $\tilde{\varphi} = \tilde{p}$ und macht den Grenzübergang $v \to 1$, so entsteht die für $|\xi| > 1$ absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$S_\nu^{\mu,\lambda(j)}(\xi;\gamma)\, A_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = \xi^\mu(\xi^2-1)^{-\mu/2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)\, \psi_{\nu+2t}^{(j)}(\gamma\xi) \quad (j = 1,2,3,4) \tag{41}$$

mit der Abkürzung

$$A_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} (-1)^t a_{\nu,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)\,. \tag{42}$$

Eine ähnliche Entwicklung erhält man mit $\tilde{\varphi} = \tilde{r}$ und $v \to 0$. Der Parameter ν wird auch charakteristischer Exponent genannt. Die Lösungen $S_\nu^{\mu,\lambda(1)}(\xi;\gamma)$ und $\widetilde{Qs}_{-\nu-1}^{\mu,\lambda}(\xi;\gamma^2)$ multiplizieren sich beide bei einem halben Umlauf um $z = 0$ mit dem gleichen Faktor $\exp(i\nu\pi)$; sie sind daher zueinander proportional.

5. Besondere Werte der Parameter. Ist die Abbrechbedingung (30) nach links $\nu = -\mu + \lambda + 2s + 1$ mit $s = 0, 1, 2, \ldots,$ erfüllt, so konvergiert die Reihe (41) für $j = 1$ auch noch innerhalb des Einheitskreises höchstens mit Ausnahme der Punkte $\xi = 0, \pm 1$. Indem man rechts den Term $k = -s$ mit der niedrigsten Potenz in ξ herausgreift, erhält man für $\xi \to \pm i\,0$

$$S_\nu^{\mu,\lambda(1)}(\xi;\gamma)\, A_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2) \approx e^{\mp i\pi\mu/2}\, a_{\nu,-\nu-\mu+\lambda+1}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\lambda-\mu+1} \frac{\xi^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda-\mu+5/2)}\,. \tag{43}$$

Analog erhält man für die linke Abbrechbedingung $\nu = -\mu - \lambda + 2s$ mit $s = 0, 1, 2, \ldots,$ und $\xi \to \pm i\,0$

$$S_\nu^{\mu,\lambda(1)}(\xi;\gamma)\, A_\nu^{\mu,\lambda}(\gamma^2) \approx e^{\mp i\pi\mu/2}\, a_{\nu,-\nu-\mu-\lambda}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\mu+\lambda} \frac{\xi^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda-\mu+3/2)}\,. \tag{44}$$

Die nächsten Glieder sind von der Ordnung $\xi^{\lambda+3}$ bzw. $\xi^{-\lambda+2}$. Man erkennt durch Vergleich mit (40) und (11), daß $S_\nu^{\mu,\lambda(1)}(\xi;\gamma)$ in den beiden Fällen mit $\widetilde{rs}_\nu^{\mu,\lambda}(\xi;\gamma^2)$ bzw. $\widetilde{rs}_\nu^{\mu,-\lambda-1}(\xi;\gamma^2)$ proportional ist und kann den Proportionalitätsfaktor leicht angeben.

Wir betrachten nun den Fall, daß $\nu = \mu + \lambda + 2s + 1$ mit $s = 0, 1, 2, \ldots$. Dann reduziert sich, wie man unmittelbar mit den Darstellungen (10) und (11) für $\tilde{p}_\nu^{-\mu,\lambda}(\eta)$ und $\tilde{r}_\nu^{-\mu,\lambda}(\eta)$ bestätigen kann, die Reihendarstellung (40) mit oberem Index $-\mu$ an Stelle von μ auf

$$\widetilde{\varphi s}_{\mu+\lambda+2s+1}^{-\mu,\lambda}(\eta;\gamma^2) = \sum_{t=-s}^{\infty} (-1)^t \alpha_{\mu+\lambda+2s+1,2t}^{\mu,\lambda}(\gamma^2)\, \tilde{\varphi}_{\mu+\lambda+2s+2t+1}^{-\mu,\lambda}(\eta)\,, \tag{45}$$

wenn $\tilde{\varphi}$ eine der Funktionen $\tilde{p}$ oder $\tilde{r}$ bedeutet. Weiter ist in diesem Fall $\tilde{p} = \tilde{r}$, also auch $\widetilde{ps} = \widetilde{rs}$. Ferner sind die hypergeometrischen Funktionen in (10) und (11) dann die Jacobischen Polynome, also insbesondere für $v = 1$ bzw. $v = 0$ endlich. Damit

ergibt sich, daß das Verhalten von $\widetilde{rs}^{-\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\eta;\gamma^2)$ für $\eta\to 1$ bzw. $\eta\to 0$ durch die Faktoren $(1-\eta^2)^{\mu/2}$ bzw. $\eta^{\lambda+1}$ bestimmt ist. Solche Entwicklungen nach Jacobischen Polynomen hat kürzlich auch PALERO[7]) gegeben.

Die Funktionen $\widetilde{p}^{-\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\eta)$, $s=0,1,2,\ldots$, sind orthogonal über dem Intervall $0\leqq\eta\leqq 1$ mit der Belegungsfunktion 1, wenn $\operatorname{Re}\lambda>-\frac{3}{2}$ und $\operatorname{Re}\mu>-1$ ist. Dasselbe gilt, wie man aus der Differentialgleichung und dem Verhalten bei $\eta=0,1$ schließt, auch für die Funktionen $\widetilde{ps}^{-\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\eta;\gamma^2)$ mit denselben Einschränkungen für λ und μ. Sind λ und μ insbesondere reell, $\lambda>-\frac{3}{2}$, $\mu>-1$, so sind die Orthogonalfunktionen $\widetilde{p}^{-\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\eta)$ ebenso wie die $\widetilde{ps}^{-\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\eta;\gamma^2)$ reell und besitzen s einfache Nullstellen im Intervall $0<v<1$.

Ist insbesondere $\mu\equiv m=0,1,2,\ldots$, so erhält man

$$ps^{-m,\lambda}_{m+\lambda+2s+1}(\eta;\gamma^2)=(-1)^m\,\widetilde{ps}^{m,\lambda}_{m+\lambda+2s+1}(\eta;\gamma^2)\,. \tag{46}$$

6. Asymptotik für große reelle γ. Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß es Lösungen der Differentialgleichung (13) gibt, die gleichzeitig bei $\eta=0$ das Verhalten $\eta^{\lambda+1}$ und bei $\eta=1$ das Verhalten $(1-\eta^2)^{\mu/2}$ mit vorgegebenen reellen Werten $\lambda>-\frac{3}{2}$ und $\mu>-1$ besitzen. Diese sind die Orthogonalfunktionen $\widetilde{ps}^{-\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\eta;\gamma^2)$ mit $s=0,1,2,\ldots$. Wir wollen nun diese Lösungen in $0\leqq\eta\leqq 1$ für große positive und negative Werte von γ^2 untersuchen.

Spalten wir zunächst den Faktor $\eta^{\lambda+1}(1-\eta^2)^{\mu/2}$ ab,

$$\Psi(\eta)=\eta^{\lambda+1}(1-\eta^2)^{\mu/2}X(\eta)\,, \tag{47}$$

so ist die Funktion $X(\eta)$ in $\eta=0$ und $\eta=1$ endlich und von Null verschieden. Wir betrachten erst den Fall $\gamma^2\to+\infty$ und nehmen γ positiv an. Die Substitution

$$\begin{gathered} x=\gamma\eta^2\,,\ X(\eta)=e^{-\gamma\eta^2/2}y(x)=e^{-x/2}X(x)\,,\\ \Lambda+\gamma^2-(\mu+\lambda+1)(\mu+\lambda+2)-2\gamma(\lambda+\tfrac{3}{2})=4\gamma N \end{gathered} \tag{48}$$

führt dann auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &x\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\lambda+\frac{3}{2}-\left(\mu+\lambda+\gamma+\frac{5}{2}\right)\frac{x}{\gamma}+\frac{x^2}{\gamma}\right]\frac{dy}{dx}+\\ &\qquad+\left[N+\left(\mu+\lambda+\frac{5}{2}\right)\frac{x}{2\gamma}-\frac{x^2}{4\gamma}\right]y=0\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Setzt man formal $1/\gamma=0$, so ist dies die Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktionen mit der Lösung $F(-N;\lambda+\frac{3}{2};x)$. Man kann zeigen, daß sie für $N=s=0,1,2,\ldots$, eine Approximation der Funktionen $\widetilde{ps}^{-\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\eta;\gamma^2)$ gibt (bezüglich der Methode siehe MEIXNER-SCHÄFKE[3]), S. 240ff.). Ferner folgt mit (48)

$$\Lambda^{-\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\gamma^2)=-\gamma^2+2\gamma(\lambda+\tfrac{3}{2}+2s)+O(1). \tag{50}$$

[7]) B. R. S. PALERO, Sobre la ecuacion Diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{a_0+a_1\cos 2x}{b_0+b_1\cos 2x}-\frac{m(m-1)}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{n(n-1)}{\cos^2 x}\right]y=0\,.$$

Mem. de Matem. Inst. "Jorge Juan", Cons. Sup. Inverst. Cient. Madrid (1956).

Um die Approximation zu verbessern, setzen wir

(51) $$y(x) = \sum_t b_t(\gamma)\, F(-s-t; \lambda + \tfrac{3}{2}; x)$$

und versuchen die Koeffizienten $b_t(\gamma)$ so zu bestimmen, daß

(52) $$b_t \to 0 \quad (t \neq s), \quad b_s \to 1 \quad \text{und} \quad N = s + O\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

Nach formalem Einsetzen von (51) in die Differentialgleichung (49) lassen sich unter Verwendung der Differentialgleichung für die konfluente hypergeometrische Funktion $F(a; s; x)$

$$x\frac{d^2F}{dx^2} + (c - x)\frac{dF}{dx} - aF = 0$$

und der Rekursionen

$$x\frac{dF(a;c;x)}{dx} = -aF(a;c;x) + aF(a+1;c;x),$$

$$xF(a;c;x) = (c-2a)\,F(a;c;x) + (a-c)\,F(a-1;c;x) + aF(a+1;c;x)$$

die zweite und erste Ableitung der konfluenten hypergeometrischen Funktionen, sowie die Faktoren x und x^2 beseitigen. Durch Verschieben des Summationsindex erhält man ähnlich wie in Abschnitt 2 ein Rekursionssystem für die Koeffizienten b_t:

(53) $$\begin{aligned}&(s+t+z)(s+t+1)\,b_{t+2} - 2\mu(s+t+1)\,b_{t+1} + \\ &+ [-4\gamma N + 4(s+t)\gamma - 2(s+t)(\lambda+\tfrac{3}{2}) - 2(s+t)^2]\,b_t + \\ &+ 2(\lambda+s+t+\tfrac{1}{2})\,\mu b_{t-1} + (\lambda+s+t-\tfrac{1}{2})(\lambda+s+t+\tfrac{1}{2})\,b_{t-2} = 0 \\ &\qquad\qquad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).\end{aligned}$$

Die Bedingung n (52) lassen sich formal mit den Ansätzen

(54) $$\begin{cases} b_0 = 1, \quad 2\gamma b_1 = -(\lambda+s+\tfrac{3}{2})\,\mu + O(1/\gamma), \quad 2\gamma b_{-1} = -\mu s + O(1/\gamma), \\ 8\gamma b_2 = -(\lambda+s+\tfrac{3}{2})(\lambda+s+\tfrac{5}{2}) + O(1/\gamma), \quad 8\gamma b_{-2} = s(s-1) + O(1/\gamma), \\ b_t = O(\gamma^{-2}) \quad \text{für} \quad t = \pm 3, \pm 4, \ldots, \end{cases}$$

(55) $$4\gamma N = 4\gamma s - \left(2\mu + \lambda + \frac{5}{2}\right)\left(\lambda + \frac{3}{2}\right) - s(2\lambda+3) - 2s^2 + \frac{A}{\gamma} + \frac{B}{\gamma^2} + \cdots$$

erfüllen. Dann entsteht für den „Eigenwert“ $\Lambda^{\mu,\lambda}_{\mu+\lambda+2s+1}(\gamma^2)$ die asymptotische Darstellung

(56) $$\begin{aligned}\Lambda = -\gamma^2 + q\gamma + \frac{1}{2}L + M - \frac{q^2}{8} - \frac{q}{64\gamma}[q^2 - 4L - 32M] - \\ - \frac{1}{1024\gamma^2}[5q^4 + 128(4L - 3q^2)M - 8q^2(3L-2) + 16L^2] + O(1/\gamma^3).\end{aligned}$$

Hierin ist der Übersichtlichkeit halber gesetzt

(57) $$q = 2(\lambda + 2s + \tfrac{3}{2}) \quad (s = 0, 1, 2, \ldots), \quad L = \lambda^2 + \lambda - \tfrac{3}{4}, \quad M = \mu^2 - \tfrac{1}{4}.$$

Für $L = -\frac{3}{4}$ geht (56) in die bekannte asymptotische Darstellung im Fall der Sphäroidfunktionen über.

Der Fall $\gamma^2 \to -\infty$ bedarf keiner besonderen Untersuchung. Er läßt sich wegen (17) auf den soeben behandelten Fall zurückführen. Sei $\gamma^2 = -\gamma^{*2}$ und $\gamma^* \to +\infty$. Der Eigenwert Λ sei nun Λ^* genannt. Dann wird

$$\Psi(\eta) = \eta^{\lambda+1} (1 - \eta^2)^{\mu/2} e^{\gamma^*(\eta^2-1)/2} \sum_{t=-s}^{\infty} b_t^* F(-s - t; \mu + 1; \gamma^*(1 - \eta^2)). \tag{58}$$

Die b_t^* gehen aus den b_t durch die Ersetzung $\mu \to \lambda + \frac{1}{2}$, $\lambda \to \mu - \frac{1}{2}$ hervor. Der Eigenwert $\Lambda^*(-\gamma^{*2})$ läßt sich durch die Entwicklung in (56) über

$$\Lambda^*(-\gamma^{*2}) = \Lambda(\gamma^{*2}) + \gamma^{*2} \tag{59}$$

(man ersetzt also in (56) überall γ durch γ^*) ausdrücken, wobei aber q, L und M jetzt die neue Bedeutung

$$q = 2(\mu + 2s + 1), \quad L = \mu^2 - 1, \quad M = \lambda(\lambda + 1) \tag{60}$$

haben.

Für Unterstützung bei dieser Arbeit will A. L. der John Simon Guggenheim Foundation herzlichen Dank sagen.

Eingegangen am 10. 8. 1959

On the Singularities of an Analytic Function with Values in a Banach Space*)

By HELMUT SCHAEFER in Pullman, Wash.

A convex cone (of vertex 0) in a real or complex vector space E is a subset $K \subset E$ which is invariant under addition and homothetic maps of positive ratio, i.e., which is such that $K + K \subset K$ and $\lambda K \subset K$ $(\lambda > 0)$. If E is a normed space, a convex cone K is *normal* in E if there is a real norm $x \to \|x\|$, generating the topology of E, such that

$$\|x + y\| \geqq \|y\|$$

for all $x, y \in K$. The notion of normal cone plays a basic rôle in the theory of partially ordered locally convex spaces [3], [4]. We shall show here that it is also the appropriate concept to extend and generalize to analytic functions with values in a Banach space, the following theorem due to PRINGSHEIM:

Theorem. *Let* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) z^n$ *both have radius of convergence* 1, *and let* $\mathrm{Re}(a_n) \geqq 0$ $(n \geqq 0)$. *Then* $z = 1$ *is a singular point of the analytic function* $z \to f(z)$.

For the short proof, we refer the reader to LANDAU [2], § 17. We shall also need the following lemma, E' denoting the topological dual of E.

Lemma. *Let E be a complex normed space, K a normal cone in E, and K' the set of continuous linear forms on E whose real parts are $\geqq 0$ on K. Then $E' = K' - K'$.*

The corresponding theorem for real normed spaces, with K' the set of continuous linear forms $\geqq 0$ on K, was first proved by KREIN and GROSBERG [1]. For the complex case, see [4], § 6.

1. We shall prove this theorem, K denoting a convex cone in a complex Banach space E.

Theorem 1. *Let K be normal in E. If $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ has radius of convergence 1, and if $a_n \in K$ for all n, then $z = 1$ is a singular point of the analytic function, with values in E, represented by $f(z)$. If, in addition, $z = 1$ is a pole of f of order k, then every other pole of f on $|z| = 1$ is of an order $\leqq k$.*

*) This work was sponsored by the Office of Ordnance Research, U.S. Army.

Proof. Let u be any continuous linear form on E. Then $x \to \operatorname{Re} u(x)$ and $x \to \to \operatorname{Im} u(x)$ are *real* continuous linear forms on E, and we have

$$u[f(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(a_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} u(a_n)\, z^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} u(a_n)\, z^n .$$

Denote by r_u, ϱ_u, σ_u in this order the radii of convergence of the three power series in the preceding equation. We have the relations

(1) $$r_u = \inf(\varrho_u, \sigma_u) \qquad (u \in E')$$

and

(2) $$1 = \inf\{r_u : u \in E'\}.$$

It is clear that in (2), E' may be replaced by any subset whose linear hull is E', hence in particular by K' since $E' = K' - K'$ by the above lemma. From (1) and (2) it follows that either a) there is a sequence $\{u_n\} \subset E'$ such that $\varrho_{u_n} \to 1$ and $\varrho_{u_n} \leqq \leqq \sigma_{u_n}$ for all n, or else b) there is a sequence $\{v_n\} \subset E'$ such that $\sigma_{v_n} \to 1$ and $\sigma_{v_n} \leqq \leqq \varrho_{v_n}$ for all n. Assume first that a) takes place. Then because of $E' = K' - K'$ we may assume that $\{u_n\} \subset K'$ and the assumptions of the Pringsheim theorem are satisfied since $\varrho_{u_n} = r_{u_n}$ by (1). It follows that every r_{u_n} is a singular point of $z \to f(z)$ and because of $r_{u_n} \to 1$, it follows that $z = 1$ is singular for f. If alternative b) holds, consider the function $z \to i f(z)$ instead of f so that ϱ_u and σ_u are interchanged. The coefficients of if are in iK, and iK is a normal cone if K is because $x \to ix$ is a topological automorphism of E. Hence we arrive at our previous conclusion for $z \to if(z)$, thus completing the first part of the proof.

Now suppose that the singularity of f whose existence at $z = 1$ has just been established, is a pole of order k. Letting $z = |z|\, e^{i\theta}$, $f(z)$ may be decomposed into four terms,

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z) + i[f_3(z) - f_4(z)]$$

such that $f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{j,n} a_n |z|^n$ and $0 \leqq \alpha_{j,n}(\theta) \leqq 1$ $(j = 1, \ldots, 4;\ n \geqq 0)$[1]. Now we obtain for $|z| < 1$

$$0 \leqq f_j(z) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n = f(|z|) \qquad (j = 1, \ldots, 4)$$

with respect to the order structure defined on E by $x \leqq y \Leftrightarrow y - x \in \overline{K}$; since K is normal, this implies $\|f_j(z)\| \leqq \|f(|z|)\|$, $j = 1, \ldots, 4$, for all $|z| < 1$ and some real norm generating the topology of E. Hence if $z_0 \neq 1$ is a pole of f on $|z| = 1$, its order is $\leqq k$.

2. We proceed to give some applications of the preceding theorem.

Let A be a complex Banach algebra with unit element. If $a \in A$, the spectral radius $r(a)$ is the maximum modulus of the points (complex numbers) in the spectrum of a. It is well known that $r = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}$. If C is a subset of A, the *cone spanned*

---

[1]) Set $\alpha_{1,n} = \sup\{0, \cos n\varphi\}$, $\alpha_{2,n} = \sup\{0, -\cos n\varphi\}$, $\alpha_{3,n} = \sup\{0, \sin n\varphi\}$, $\alpha_{4,n} = \sup\{0, -\sin n\varphi\}$ $(n \geqq 0)$.

by C is the smallest convex cone (of vertex 0) in the underlying B-space containing C. With this notation, we obtain

Theorem 2. *If* $a \in A$ *and the cone spanned by the set* $\{a^n : n \geqq 0\}$ *is normal* (in the underlying B-space), *then* $r(a)$ *is in the spectrum of* a. *If, moreover,* $r(a)$ *is a pole of order* k *of the resolvent* R_λ *of* a, *every other pole of* R_λ *on* $|\lambda| = r(a)$ *is of order* $\leqq k$.

Proof. If $r(a)=0$, the result is immediate. If $r(a) > 0$, it suffices to apply th. 1 to

$$R_{1/\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \mu^{n+1},$$

the latter representation of the resolvent being valid for $|\mu| < [r(a)]^{-1}$. A special case of th. 2 is the following

Corollary. *Let* E *be a complex Banach space,* K *a cone in* E *which is normal and such that* K' *is a normal cone in the (strong) dual* E'. *If* T *is a bounded operator on* E *with* $T(K) \subset K$, *th.* 2 *applies to* T *as an element of the* B-*algebra of bounded endomorphisms of* E [2]).

The proof of this corollary rests on the fact that under the assumptions made on K, the set of bounded operators on E with $T(K) \subset K$ is a normal cone in the space of continuous endomorphisms of E. For this, see [4], § 11 or [5], Lemma 3.

If E is the complex plane, it is readily verified that a normal cone in E is a sector, vertex at 0, and of central angle $< \pi$. Hence

Theorem 3. *Let* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *have radius of convergence* 1, *and assume that the set* $\{a_n\}$ *of coefficients is contained in a sector, vertex at* 0 *and of central angle* $< \pi$, *of the complex plane. Then the analytic function represented by* $f(z)$ *is singular at* $z = 1$, *and if* 1 *is a pole of* f *of order* k, *there is no pole of* f *on* $|z| = 1$ *of order* $> k$.

We observe that th. 3 is not a special case of the Pringsheim theorem or conversely. The assumption "Re $(a_n) \geqq 0$" amounts in essence to requiring only that the set of coefficients be contained in a semi-plane. On the other hand, "$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) z^n$ has radius of convergence 1" is an additional hypothesis not needed in th. 3. Further, the assumptions of the Pringsheim theorem are not sufficient for the second part of th. 3 to hold as this example shows.

Le $z \to f(z)$ be the rational function given by

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{i}{(1+z^2)^2}.$$

f has a pole of order 1 at $z = 1$ and poles of order 2 at $z = \pm i$. If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is the

---

[2]) The fact that under the conditions stated on K, $r(T)$ is in the spectrum of T, was proved earlier by BONSALL (cf. [4], § 11).

expansion of f about 0, it is found that

$$\left.\begin{aligned} a_{2n} &= 1 + (-1)^n (n+1)\, i\,, \\ a_{2n+1} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (n \geqq 0)\,.$$

Thus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ satisfies the assumptions of the Pringsheim theorem but not the conclusion of th. 3.

References

[1] J. Grosberg and M. Krein, Sur le décomposition des fonctionelles en composantes positives. C.R. (Doklady) Acad. Sci. U.R.S.S. (N.S.) **25**, 723—726 (1939) (French).

[2] E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Springer-Verlag, Berlin 1929.

[3] H. Schaefer, Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. Math. Ann. **135**, 115—141 (1958).

[4] H. Schaefer, Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume, II. Math. Ann. **138**, 259—286 (1959).

[5] H. Schaefer, Some Spectral Properties of Positive Linear Operators. To appear in Pac. J. Math.

Eingegangen am 2. 10. 1959

Über die Fortsetzung holomorpher Abbildungen

Von Hans Kerner in München

In der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen kennt man Kriterien dafür, daß alle in einem Gebiet G holomorphen Funktionen $f : G \to C^1$ in ein größeres Gebiet G' fortsetzbar sind. Man kann nun an Stelle der Funktionen, also der Abbildungen in die komplexe Ebene C^1, holomorphe Abbildungen in einen komplexen Raum Y betrachten und die Frage stellen, ob die oben erwähnten Kriterien auch Aussagen über die Fortsetzbarkeit holomorpher Abbildungen $\tau : G \to Y$ liefern. Läßt man jedoch als Bildraum an Stelle der komplexen Ebene C^1 einen beliebigen komplexen Raum Y zu, so darf man keine allgemeinen Aussagen über die Fortsetzbarkeit einer holomorphen Abbildung $\tau : G \to Y$ erwarten. Wählt man etwa als Gebiet G ein Nichtholomorphiegebiet und als Bildraum $Y = G$, so sind alle in G holomorphen Funktionen in ein größeres Gebiet G' fortsetzbar, dagegen ist die identische Abbildung $\iota : G \to G$ sicher nicht nach G' fortsetzbar zu einer holomorphen Abbildung $\iota' : G' \to G$. Wenn man dagegen als Bildraum an Stelle der komplexen Ebene C^1 einen beliebigen *holomorph-vollständigen* komplexen Raum Y zuläßt, so kann man unter Benutzung von Sätzen von R. Remmert [5] zeigen: Sind alle holomorphen Funktionen fortsetzbar, so ist es auch jede holomorphe Abbildung in einen holomorph-vollständigen komplexen Raum (Satz 2).

Man kann jedem unverzweigten Riemannschen Gebiet G ein maximales Gebiet $H(G)$ zuordnen, in das alle in G holomorphen Funktionen fortsetzbar sind. $H(G)$ heißt die Holomorphiehülle[1]) von G. Nach einem Satz von K. Oka ist $H(G)$ holomorph-vollständig. Damit folgt: Sind G_1 und G_2 unverzweigte Riemannsche Gebiete, so induziert jede holomorphe Abbildung $\tau : G_1 \to G_2$ eine holomorphe Abbildung $\tilde{\tau} : H(G_1) \to H(G_2)$ (Satz 4).

Für den Spezialfall, daß τ eine lokaltopologische Abbildung von G_1 in G_2 ist, wurde die Existenz der Abbildung $\tilde{\tau} : H(G_1) \to H(G_2)$ bereits 1932 von H. Cartan und P. Thullen ([3], [2]) bewiesen. In diesem Falle ergibt sich, daß dann auch $\tilde{\tau}$ lokal-topologisch ist.

Wir wollen hier das entsprechende Problem für eigentliche Abbildungen behandeln: Es sei $\tau : G_1 \to G_2$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Ist dann auch

$$\tilde{\tau} : H(G_1) \to H(G_2)$$

eigentlich? Wenn τ nur eine Abbildung *in* G_2 ist, lassen sich einfache Gegenbeispiele

[1]) Zum Begriff der Holomorphiehülle eines unverzweigten Riemannschen Gebietes vgl. [1], [2], [3], [10].

angeben[2]). Es gilt jedoch: Ist $\tau: G_1 \to G_2$ eigentlich und surjektiv, dann ist auch $\tilde{\tau}: H(G_1) \to H(G_2)$ eine eigentliche surjektive Abbildung (Satz 5). Jede endlichblättrige analytisch-verzweigte Überlagerung Riemannscher Gebiete ist also fortsetzbar zur Überlagerung ihrer Holomorphiehüllen.

Die Untersuchung eigentlicher Abbildungen liefert noch eine weitere Aussage: Bei einer eigentlichen holomorphen Abbildung ist das Bild eines holomorph-konvexen komplexen Raumes wieder holomorph-konvex (Satz 7).

1. Fortsetzbarkeit holomorpher Abbildungen.

1.1. Wir betrachten nur zusammenhängende normale komplexe Räume[3]). Die in einem komplexen Raum X holomorphen Funktionen bilden einen Integritätsring, den wir mit $\mathfrak{R}(X)$ bezeichnen. Jede holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y induziert einen Homomorphismus $^*\tau: \mathfrak{R}(Y) \to \mathfrak{R}(X)$, wenn man definiert: $^*\tau(f) := f \circ \tau$ für $f \in \mathfrak{R}(Y)$. Wir stellen die Frage, ob unter gewissen Voraussetzungen jeder Homomorphismus von $\mathfrak{R}(Y)$ in $\mathfrak{R}(X)$ durch eine holomorphe Abbildung von X in Y induziert wird.

R. Remmert hat folgenden tiefliegenden Satz bewiesen[4]): Zwei holomorph-vollständige komplexe Räume X und Y, deren Ringe $\mathfrak{R}(X)$ und $\mathfrak{R}(Y)$ isomorph sind, sind analytisch äquivalent.

Eine Verallgemeinerung dieser Aussage ist

Satz 1. *Es seien X und Y komplexe Räume, C der Körper der komplexen Zahlen; Y sei holomorph-vollständig. $^*\tau: \mathfrak{R}(Y) \to \mathfrak{R}(X)$ sei ein Homomorphismus von $\mathfrak{R}(Y)$ in $\mathfrak{R}(X)$ und für jedes $c \in C$ gelte $^*\tau(c) = c$. Dann existiert genau eine holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$, so daß für jedes $f \in \mathfrak{R}(Y)$ gilt: $^*\tau(f) = f \circ \tau$.*

Beweis. Es sei $\tilde{Y}$ die Menge aller Ideale $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}(Y)$ mit der Eigenschaft: $\mathfrak{R}(Y)/\mathfrak{a} = C$. In $\tilde{Y}$ werde eine Topologie eingeführt durch die Festsetzung: Eine Folge $\mathfrak{a}_\nu \in \tilde{Y}$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $\mathfrak{a} \in \tilde{Y}$, wenn für jedes $f \in \mathfrak{R}(Y)$ die Folge komplexer Zahlen $f/\mathfrak{a}_\nu$ gegen $f/\mathfrak{a}$ konvergiert. R. Remmert hat bewiesen, daß es dann eine topologische Abbildung $\vartheta: Y \to \tilde{Y}$ von Y auf $\tilde{Y}$ gibt[5]). Die Abbildung ϑ ist dabei folgendermaßen erklärt: $\vartheta(y)$, $y \in Y$, ist das Ideal aller Funktionen $g \in \mathfrak{R}(Y)$ mit $g(y) = 0$.

Ist x ein beliebiger Punkt von X, so werde durch $\lambda_x(g) := {}^*\tau(g)(x)$, $g \in \mathfrak{R}(Y)$, ein Homomorphismus λ_x von $\mathfrak{R}(Y)$ in C definiert. Für $c \in C$ ist $\lambda_x(c) = {}^*\tau(c)(x) = c$. Daher ist λ_x ein Homomorphismus von $\mathfrak{R}(Y)$ *auf* C. Der Kern $\overset{-1}{\lambda_x}(0) =: \mathfrak{g}_x$ ist das Ideal aller Funktionen $g \in \mathfrak{R}(Y)$, für die gilt: $^*\tau(g)(x) = 0$. Es ist $\mathfrak{R}(Y)/\mathfrak{g}_x = C$, also ist $\mathfrak{g}_x \in \tilde{Y}$. Die Zuordnung $\tilde{\tau}(x) := \mathfrak{g}_x$ ist somit eine Abbildung von X in $\tilde{Y}$. Wir zeigen, daß $\tilde{\tau}$ stetig ist. Es sei $x_\nu \in X$, $x \in X$ und $\lim x_\nu = x$. Dann ist $\tilde{\tau}(x_\nu) = \mathfrak{g}_{x_\nu}$ und

---

[2]) Es sei etwa $G_1 := \{w: |w| < 1\}$, $G_2 := \{(z_1, z_2): |z_1| < 2, |z_2| < 2\} - \{1 \leqq |z_1| < 2, |z_2| \leqq 1\}$, $\tau(w) := (w, 0)$. $\tau: G_1 \to G_2$ ist eigentlich. Dagegen ist $H(G_1) = G_1$, $H(G_2) = \{|z_1| < 2, |z_2| < 2\}$, also ist $\tilde{\tau}: H(G_1) \to H(G_2)$ nicht eigentlich.

[3]) Zur Definition des (normalen) komplexen Raumes vgl. [7], [2], [4]. Nach [4], Satz 33, ist die Definition des komplexen Raumes von H. Behnke und K. Stein mit der Definition von H. Cartan äquivalent.

[4]) Vgl. R. Remmert [5].

[5]) Vgl. [5].

für jedes $f \in \mathfrak{R}(Y)$ gilt: $f/\mathfrak{g}_{x_\nu} = \lambda_{x_\nu}(f) = {}^*\tau(f)(x_\nu)$. Die Funktion ${}^*\tau(f) \in \mathfrak{R}(X)$ ist in X holomorph, also auch stetig. Daher gilt $\lim f/\mathfrak{g}_{x_\nu} = \lim ({}^*\tau(f))(x_\nu) = {}^*\tau(f)(\lim x_\nu) = {}^*\tau(f)(x) = f/\mathfrak{g}_x$. Nach Definition der Topologie in $\widetilde{Y}$ bedeutet das: $\lim \mathfrak{g}_{x_\nu} = \mathfrak{g}_x$ oder $\lim \tilde{\tau}(x_\nu) = \tilde{\tau}(x)$. Damit ist gezeigt, daß $\tilde{\tau}: X \to \widetilde{Y}$ stetig ist. Also ist auch $\tau := \vartheta^{-1} \circ \tilde{\tau}: X \to Y$ eine stetige Abbildung. Für jede in Y holomorphe Funktion $f \in \mathfrak{R}(Y)$ gilt: $f \circ \tau(x) = f \circ \vartheta^{-1} \circ \tilde{\tau}(x) = f/\mathfrak{g}_x = \lambda_x(f) = {}^*\tau(f)(x)$, $x \in X$. ${}^*\tau(f) \in \mathfrak{R}(X)$ ist in X holomorph. Aus einem Satz von R. REMMERT ([6], Satz 11) folgt, daß dann auch τ holomorph ist. Daher ist τ eine gesuchte Abbildung.

Es sei nun $\tau_1 : X \to Y$ eine weitere holomorphe Abbildung mit $f \circ \tau_1 = {}^*\tau(f) = f \circ \tau$ für alle $f \in \mathfrak{R}(Y)$. Wir nehmen an, es existiere ein Punkt $x \in X$ mit $\tau_1(x) \neq \tau(x)$. Dann gibt es, weil Y holomorph-separabel ist, ein $f \in \mathfrak{R}(Y)$, so daß gilt: $f \circ \tau_1(x) \neq f \circ \tau(x)$; dies widerspricht der Voraussetzung $f \circ \tau_1 = f \circ \tau$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Aus Satz 1 folgt:

Satz 2. *Es seien X_1 und X_2 komplexe Räume und $\varphi : X_1 \to X_2$ eine holomorphe Abbildung von X_1 in X_2. Zu jeder in X_1 holomorphen Funktion $f_1 : X_1 \to C^1$ existiere genau eine in X_2 holomorphe Funktion $f_2 : X_2 \to C^1$ mit $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Dann existiert zu jeder holomorphen Abbildung $\tau_1 : X_1 \to Y$ von X_1 in einen holomorph-vollständigen komplexen Raum Y genau eine holomorphe Abbildung $\tau_2 : X_2 \to Y$, so daß gilt: $\tau_1 = \tau_2 \circ \varphi$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist ${}^*\varphi : \mathfrak{R}(X_2) \to \mathfrak{R}(X_1)$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{R}(X_2)$ auf $\mathfrak{R}(X_1)$. Zu dem Homomorphismus ${}^*\varphi^{-1} \circ {}^*\tau_1 : \mathfrak{R}(Y) \to \mathfrak{R}(X_2)$ existiert nach Satz 1 eine holomorphe Abbildung $\tau_2 : X_2 \to Y$ mit $f \circ \tau_2 = {}^*\varphi^{-1} \circ {}^*\tau_1(f)$, $f \in \mathfrak{R}(Y)$. Es ist also ${}^*\varphi(f \circ \tau_2) = {}^*\tau_1(f)$ oder $f \circ \tau_2 \circ \varphi = f \circ \tau_1$. Weil Y holomorph-separabel ist, folgt daraus $\tau_2 \circ \varphi = \tau_1$.

1.2. Als Spezialfall von Satz 2 erhält man

Satz 3. *Jede holomorphe Abbildung $\tau : G \to Y$ eines unverzweigten Riemannschen Gebietes G in einen holomorph-vollständigen komplexen Raum Y ist in die Holomorphiehülle $H(G)$ fortsetzbar.*

Satz 4. *Es seien G_1 und G_2 unverzweigte Riemannsche Gebiete, $H(G_1)$ und $H(G_2)$ ihre Holomorphiehüllen, φ_i, $i = 1, 2$, die Abbildungen von G_i in $H(G_i)$. Dann existiert zu jeder holomorphen Abbildung $\tau : G_1 \to G_2$ genau eine holomorphe Abbildung $\tilde{\tau} : H(G_1) \to H(G_2)$ mit der Eigenschaft: $\tilde{\tau} \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \tau$.*

Beweis. $H(G_2)$ ist nach K. OKA holomorph-vollständig. Nach Satz 3 gibt es daher zu der Abbildung $\varphi_2 \circ \tau : G_1 \to H(G_2)$ genau eine holomorphe Abbildung $\tilde{\tau} : H(G_1) \to H(G_2)$ mit $\tilde{\tau} \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \tau$.

2. Eigentliche Abbildungen.

2.1. Wir benötigen zuerst einige Hilfssätze, die eine Charakterisierung der eigentlichen holomorphen Abbildungen durch Eigenschaften der Ringe holomorpher Funktionen liefern.

Hilfssatz 1. *Es sei $\tau : X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X auf einen komplexen Raum Y. Dann ist $\mathfrak{R}(X)$ algebraisch über $\mathfrak{R}(Y)$ vermöge*

τ, d. h. zu jeder Funktion $f \in \mathfrak{R}(X)$ gibt es Funktionen $c_\sigma \in \mathfrak{R}(Y)$, $\sigma = 1, \ldots, s$ (s natürliche Zahl), so daß gilt:

$$f^s(x) + c_1(\tau(x)) \cdot f^{s-1}(x) + \cdots + c_s(\tau(x)) = 0, \quad x \in X.$$

Beweis. Aus Sätzen über analytische Zerlegungen (vgl. [7], [8], [9]) ergibt sich, daß zu der Abbildung $\tau : X \to Y$ eine komplexe Basis (τ_0, X_1) existiert. Dabei ist X_1 ein komplexer Raum und τ_0 eine surjektive holomorphe Abbildung von X auf X_1 mit folgender Eigenschaft: τ_0 ist mit τ verwandt und zu jeder von τ abhängigen holomorphen Abbildung $f : X \to Z$ in einen komplexen Raum Z existiert eine holomorphe Abbildung $f_1 : X_1 \to Z$ mit $f = f_1 \circ \tau_0$. Jede Niveaumenge von τ ist kompakt, daher ist jede in X holomorphe Funktion $f : X \to C^1$ von τ abhängig. Daraus folgt, daß $\mathfrak{R}(X_1)$ zu $\mathfrak{R}(X)$ isomorph ist. Es gibt eine *nirgends entartete* eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $\tau_1 : X_1 \to Y$ mit $\tau = \tau_1 \circ \tau_0$. Daher ist (X_1, τ_1, Y) eine endlichblättrige analytisch-verzweigte Überlagerung und nach einem Satz von H. Grauert und R. Remmert ([4], Satz 12) ist dann $\mathfrak{R}(X_1)$ algebraisch über $\mathfrak{R}(Y)$ vermöge τ_1. Daher ist $\mathfrak{R}(X)$ algebraisch über $\mathfrak{R}(Y)$ vermöge τ.

Eine Aussage in umgekehrter Richtung stellt der folgende Hilfssatz dar.

Hilfssatz 2. *Es seien X und Y komplexe Räume, X holomorph-konvex, und $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von X in Y. $\mathfrak{R}(X)$ sei algebraisch über $\mathfrak{R}(Y)$ vermöge τ. Dann ist τ eine eigentliche Abbildung.*

Beweis. Es sei $K \subset Y$ kompakt. Zu jeder in X holomorphen Funktion f gibt es Funktionen $c_\sigma \in \mathfrak{R}(Y)$ mit

$$f^s(x) + c_1(\tau(x)) \cdot f^{s-1}(x) + \cdots + c_s(\tau(x)) = 0.$$

Jedes c_σ ist auf K beschränkt, daher ist f auf $\overset{-1}{\tau}(K)$ beschränkt. Weil X holomorphkonvex ist, folgt aus einem Satz von H. Cartan ([2], IX, théorème 1), daß $\overset{-1}{\tau}(K)$ kompakt ist; d. h. τ ist eigentlich.

2.2. Wir wenden diese Aussagen nun auf unverzweigte Riemannsche Gebiete und deren Holomorphiehüllen an. Es gilt:

Satz 5. *Es seien G_1 und G_2 unverzweigte Riemannsche Gebiete und $\tau : G_1 \to G_2$ eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung. Dann ist auch $\tilde{\tau} : H(G_1) \to H(G_2)$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von $H(G_1)$ auf $H(G_2)$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist $\mathfrak{R}(G_1)$ algebraisch über $\mathfrak{R}(G_2)$ vermöge τ. Daher ist auch $\mathfrak{R}(H(G_1))$ algebraisch über $\mathfrak{R}(H(G_2))$ vermöge $\tilde{\tau}$. $H(G_1)$ ist holomorph-konvex, also ist nach Hilfssatz 2 $\tilde{\tau}$ eigentlich. $\tilde{\tau}(H(G_1))$ ist nach einem Satz von R. Remmert ([6], Satz 23) eine analytische Menge in $H(G_2)$. Daraus folgt $\tilde{\tau}(H(G_1)) = H(G_2)$.

Satz 6. *Es seien G_1 und G_2 unverzweigte Riemannsche Gebiete, $H_1 := H(G_1)$ und $H_2 := H(G_2)$ ihre Holomorphiehüllen, $\varphi_i : G_i \to H_i$, $i = 1,2$, die Abbildungen von G_i in H_i. $\tau : G_1 \to G_2$ sei eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung, $\tilde{\tau} : H_1 \to H_2$ die durch τ induzierte Abbildung. Dann wird $H_1 - \varphi_1(G_1)$ durch $\tilde{\tau}$ eigentlich auf $H_2 - \varphi_2(G_2)$ abgebildet und auch die Abbildung $\tilde{\tau} \mid \varphi_1(G_1) \to \varphi_2(G_2)$ ist eigentlich.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $H_1 - \varphi_1(G_1)$ durch $\varrho := \tilde{\tau} | (H_1 - \varphi_1(G_1))$ eigentlich auf $\tilde{\tau}(H_1 - \varphi_1(G_1))$ abgebildet wird. Für jede kompakte Menge $K \subset \tilde{\tau}(H_1 - \varphi_1(G_1))$ ist $\overset{-1}{\varrho}(K) = \overset{-1}{\tilde{\tau}}(K) \cap (H_1 - \varphi_1(G_1))$. Nach Satz 5 ist $\overset{-1}{\tilde{\tau}}(K)$ kompakt; $H_1 - \varphi_1(G_1)$ ist abgeschlossen. Daher ist $\overset{-1}{\varrho}(K)$ kompakt, d. h. ϱ ist eigentlich.

Nun ist noch nachzuweisen: $\tilde{\tau}(H_1 - \varphi_1(G_1)) = H_2 - \varphi_2(G_2)$. Wegen $\tilde{\tau}(\varphi_1(G_1)) = \varphi_2(G_2)$ und $\tilde{\tau}(H_1) = H_2$ ist $\tilde{\tau}(H_1 - \varphi_1(G_1)) \supset H_2 - \varphi_2(G_2)$. Um zu zeigen, daß $\tilde{\tau}(H_1 - \varphi_1(G_1)) \subset H_2 - \varphi_2(G_2)$ gilt, nehmen wir an, es existiere ein Punkt $\tilde{x}_0 \in H_1 - \varphi_1(G_1)$ mit $\tilde{y}_0 := \tilde{\tau}(\tilde{x}_0) \in \varphi_2(G_2)$. Es gibt eine Funktion $\tilde{f} \in \Re(H_1)$, die die endliche Menge $\overset{-1}{\tilde{\tau}}(\tilde{y}_0)$ separiert. Nach Hilfssatz 1 genügt $f := \tilde{f} \circ \varphi_1$ einer Gleichung

$$f^s(x) + c_1(\tau(x)) \cdot f^{s-1}(x) + \cdots + c_s(\tau(x)) = 0, \quad x \in G_1,\ c_\sigma \in \Re(G_2).$$

Die c_σ sind holomorph fortsetzbar zu $\tilde{c}_\sigma \in \Re(H_2)$ und es gilt $c_\sigma = \tilde{c}_\sigma \circ \varphi_2$. Für

$$x \in \overset{-1}{\varphi_1}(\overset{-1}{\tilde{\tau}}(\tilde{y}_0)) = \overset{-1}{\tau}(\overset{-1}{\varphi_2}(\tilde{y}_0)) \text{ ist } c_\sigma(\tau(x)) = \tilde{c}_\sigma \circ \varphi_2(\tau(x)) = \tilde{c}_\sigma(\tilde{y}_0)$$

und daher $f^s(x) + \tilde{c}_1(\tilde{y}_0) \cdot f^{s-1}(x) + \cdots + \tilde{c}_s(\tilde{y}_0) = 0$, und jede Lösung der Gleichung $w^s + \tilde{c}_1(\tilde{y}_0) \cdot w^{s-1} + \cdots + \tilde{c}_s(\tilde{y}_0) = 0$ kommt als Funktionswert von f in einem Punkt aus $\overset{-1}{\tau}(\overset{-1}{\varphi_2}(\tilde{y}_0))$ vor. Die Funktion $\tilde{f}$ genügt der Gleichung

$$\tilde{f}^s(\tilde{x}) + \tilde{c}_1(\tilde{\tau}(\tilde{x})) \cdot \tilde{f}^{s-1}(\tilde{x}) + \cdots + \tilde{c}_s(\tilde{\tau}(\tilde{x})) = 0, \quad \tilde{x} \in H_1,$$

und für $\tilde{x} \in \overset{-1}{\tilde{\tau}}(\tilde{y}_0)$ gilt

$$\tilde{f}^s(\tilde{x}) + \tilde{c}_1(\tilde{y}_0) \cdot \tilde{f}^{s-1}(\tilde{x}) + \cdots + \tilde{c}_s(\tilde{y}_0) = 0.$$

Alle Lösungen dieser Gleichung kommen aber bereits als Funktionswerte von f in den Punkten $\overset{-1}{\varphi_1}(\overset{-1}{\tilde{\tau}}(\tilde{y}_0))$ vor. Daher kann $\tilde{f}$ in $\tilde{x}_0$ nur einen Wert annehmen, der auch in einem Punkt von $\overset{-1}{\tilde{\tau}}(\tilde{y}_0) \cap \varphi_1(G_1)$ als Funktionswert auftritt. Somit separiert $\tilde{f}$ die Menge $\overset{-1}{\tilde{\tau}}(\tilde{y}_0)$ nicht, im Gegensatz zur Wahl von $\tilde{f}$. Damit ist ein Widerspruch hergestellt und die erste Behauptung von Satz 6 bewiesen. Der zweite Teil der Aussage ergibt sich aus der soeben bewiesenen Tatsache, daß $\overset{-1}{\tilde{\tau}}(\varphi_2(G_2)) = \varphi_1(G_1)$ ist.

2.3. Das Beweisverfahren von Hilfssatz 2 liefert noch:

Hilfssatz 3. *Es seien X und Y komplexe Räume, $\tau : X \to Y$ eine surjektive holomorphe Abbildung. $\Re(X)$ sei algebraisch über $\Re(Y)$ vermöge τ. X sei holomorph-konvex. Dann ist auch Y holomorph-konvex.*

Beweis. Wir zeigen, daß es zu jeder abgeschlossenen nichtkompakten Teilmenge N von Y eine in Y holomorphe Funktion gibt, die auf N nicht beschränkt ist. τ ist stetig und surjektiv, daher ist $\overset{-1}{\tau}(N)$ in X abgeschlossen und nichtkompakt. Weil X holomorph konvex ist, gibt es eine Funktion $f \in \Re(X)$, die auf $\overset{-1}{\tau}(N)$ nicht beschränkt

ist. Nach Voraussetzung genügt f einer Gleichung

$$f^s(x) + \cdots + c_s(\tau(x)) = 0, \quad x \in X, \ c_\sigma \in \Re(Y).$$

f ist auf $\overset{-1}{\tau}(N)$ nicht beschränkt, also ist mindestens ein c_σ auf N nicht beschränkt.

Aus Hilfssatz 1 und Hilfssatz 3 folgt:

Satz 7. *Ist $\tau: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung eines holomorph-konvexen komplexen Raumes X auf einen komplexen Raum Y, so ist auch Y holomorph-konvex.*

Literaturverzeichnis

[1] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Ergebn. Math. **3**, 3 (1934).

[2] H. Cartan, Séminaire. Paris 1951/52.

[3] H. Cartan und P. Thullen, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. **106**, 617—647 (1932).

[4] H. Grauert und R. Remmert, Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).

[5] R. Remmert, Habilitationsschrift. Münster 1956.

[6] R. Remmert, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957).

[7] K. Stein, Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132**, 63—93 (1956).

[8] K. Stein, Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen. Math. Ann. **136**, 1—8 (1958).

[9] K. Stein, Maximale meromorphe und holomorphe Abbildungen. (In Vorbereitung.)

[10] P. Thullen, Zur Theorie der Funktionen zweier komplexer Veränderlichen. Die Regularitätshüllen. Math. Ann. **106**, 64—72 (1932).

Eingegangen am 31. 10. 1959

A Note concerning certain Product Spaces

By PHILIP C. CURTIS, Jr.*) in Los Angeles (Cal.)

In a recent conversation with the author, WALTER RUDIN made the following interesting observation concerning product spaces:

If X and Y are infinite compact Hausdorff spaces, then $X \times Y$ contains two disjoint open sets of type F_σ whose closures intersect.

His proof is as follows: Choose a real valued continous function f defined on X with infinite range $f(X)$. Let $\{J_i\}$ be an infinite sequence of disjoint open intervals each of which intersects $f(X)$. If $A_i = f^{-1}(J_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, then $\{A_i\}$ is a denumerable collection of open F_σ sets in X. If $\{B_i\}$ is a similar collection of disjoint open F_σ sets in Y let

$$V = \bigcup_i A_i \times B_i \quad \text{and} \quad W = \bigcup_{i \neq k} A_i \times B_k .$$

Clearly V and W are disjoint open F_σ sets in $X \times Y$, and we assert $\overline{V} \cap \overline{W} \neq \varnothing$. If this were false, then by the compactness of $\overline{V}$, and the definition of the product topology in $X \times Y$, there would exist finite collections of open sets $\{P_j\}$, $\{Q_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, in X and Y respectively such that $\bigcup_{j=1}^{n} P_j \times Q_j$ covers $\overline{V}$ and

$$P_j \times Q_j \cap W = \varnothing , \quad j = 1, 2, \ldots, n .$$

But for some index j, $P_j \times Q_j$ must intersect at least two of the sets $A_i \times B_i$ and $A_k \times B_k$ where $i \neq k$. This implies that $P_j \times Q_j$ intersects $A_i \times B_k$. Therefore $P_j \times Q_j \cap W \neq \varnothing$ which is a contradiction.

In this note we shall consider a generalization of this result to spaces considered by GILLMAN and HENRIKSEN [2], [3]. In [3] these authors define a completely regular space X to be an F' space if for each $f \in C(X)$, the ring of real valued continuous functions on the space X, $\overline{P(f)} \cap \overline{N(f)} = \varnothing$, where $P(f) = \{x \in X : f(x) > 0\}$ and $N(f) = \{x \in X : f(x) < 0\}$. If X is a normal space, this condition is equivalent to the condition that each pair of disjoint open F_σ sets of X have disjoint closures [4, p. 1620]. Thus RUDIN's result may be restated in the following form. An F' space is never the product of two infinite compact spaces. We shall consider this question here with the assumption of compactness removed.

Specifically we ask when can the product of two completely regular spaces be an

*) The research reported here was supported by Air Force Contract AF 49(638)153.

$\boldsymbol{F}'$ space. We show below that a necessary condition is that one space be a $\boldsymbol{P}$ space[1]) and the other an $\boldsymbol{F}'$ space[2]). Conversely it is known [2, Corollary 5.8] that the product of two $\boldsymbol{P}$ spaces is a $\boldsymbol{P}$ space. Also it can be shown that the product of a $\boldsymbol{P}$ space and an $\boldsymbol{F}'$ space is an $\boldsymbol{F}'$ space if either the $\boldsymbol{P}$ space is discrete or the $\boldsymbol{F}'$ space is locally separable[3]). One might conjecture that the product of a $\boldsymbol{P}$ space and an $\boldsymbol{F}'$ space is always an $\boldsymbol{F}'$ space. This, however, is false as is shown by GILLMAN in [1]. Our results are as follows.

Theorem. *Let X and Y be two completely regular Hausdorff spaces. If $X \times Y$ is an $\boldsymbol{F}'$ space, then one component is a $\boldsymbol{P}$ space and the other is an $\boldsymbol{F}'$ space. Conversely suppose X is a $\boldsymbol{P}$ space and Y is an $\boldsymbol{F}'$ space. If X is discrete or Y is locally separable, then $X \times Y$ is an $\boldsymbol{F}'$ space.*

Proof. Clearly if $X \times Y$ is an $\boldsymbol{F}'$ space, both components must be $\boldsymbol{F}'$ spaces. Suppose neither X nor Y is a $\boldsymbol{P}$ space. Then there are points $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ and functions $f \in C(X)$, $g \in C(Y)$ such that f and g are not constant on any neighborhood of x_0 and y_0 respectively. Therefore assuming $f(x_0) = g(y_0) = 0$, we may suppose $x_0 \in \overline{P}(f)$ and $y_0 \in \overline{P}(g)$. Since f is not constant in any neighborhood of x_0, for any real number $\lambda > 0$ and any neighborhood U of x_0, there exists $x' \in U$ satisfying $0 < f(x') < \lambda$. A similar statement holds for g. Let V be any neighborhood of (x_0, y_0). Choose neighborhoods U, U' of x_0, y_0 respectively such that $U \times U' \subset V$. By the above remark there exist points $x', x'' \in U$, $y' \in U'$ such that $0 < f(x') < < g(y') < f(x'')$. If we define $h(x, y) = f(x) - g(y)$, then $h(x'', y') > 0$ and $h(x', y') < 0$. Therefore $(x_0, y_0) \in \overline{P}(h) \cap \overline{N}(h)$ and $X \times Y$ is not an $\boldsymbol{F}'$ space.

Conversely it is clear that the product of a discrete space and an $\boldsymbol{F}'$ space is an $\boldsymbol{F}'$ space. Therefore assume X is a $\boldsymbol{P}$ space and Y is a locally separable $\boldsymbol{F}'$ space. Let $f \in C(X \times Y)$ and $(x_0, y_0) \in \overline{P}(f)$. By assumption there exists a neighborhood U' of y_0 in Y and a countable set S dense in U' such that for $y \in U'$, $f(x_0, y) \geqq 0$. Since X is a $\boldsymbol{P}$ space, for each $y \in S$ there exists a neighborhood U_y of x_0 in X and a constant $\lambda \geqq 0$ such that for $x \in U_y$, $f(x, y) = \lambda$. By [2, Theorem 5.3 (5)] $U = \bigcap\limits_{y \in S} U_y$ is a neighborhood of x_0; and since S is dense in U', $f(x, y) \geqq 0$ for $x \in U$, $y \in U'$ and $X \times Y$ is an $\boldsymbol{F}'$ space. This completes the proof.

Corollary. *The product of two locally compact spaces is an $\boldsymbol{F}'$ space if and only if one space is discrete and the other is an $\boldsymbol{F}'$ space.*

Proof. It is easily verified that a locally compact $\boldsymbol{P}$ space is discrete [2, Corollary 5.4].

---

1) A completely regular space X is a $\boldsymbol{P}$ space if for each $f \in C(X)$, $\{x \in X : f(x) = 0\}$ is open. A $\boldsymbol{P}$ space is an $\boldsymbol{F}'$ space ([3], Theorem 6.3).

2) This result was obtained independently by HENRIKSEN.

3) Call a space locally separable if at each point there exists a neighborhood with a countable dense subset.

Bibliography

[1] L. Gillman, A P-space and an extremally disconnected space whose product is not an F-space. Arch. Math. **11**, 53—55 (1960).
[2] L. Gillman and M. Henriksen, Concerning rings of continuous functions. Trans. Amer. Math. Soc. **77**, 340—362 (1954).
[3] L. Gillman and M. Henriksen, Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal. Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 366—391 (1956).
[4] M. Henriksen, Some remarks on a paper of Aronszajn and Panitchpakdi. Pac. J. Math. **7**, 1619—1621 (1957).

Eingegangen am 3. 8. 1959

A P-Space and an Extremally Disconnected Space whose Product is not an F-Space

By LEONARD GILLMAN[1]) in Princeton

A summary of the facts surrounding the problem seems desirable. Let X be a completely regular space[2]). In the study of rings of functions, it is of interest to know when X is a P-space or an F-space, or is extremally disconnected (e.d.), because of the following characterizations in terms of the ring $C(X)$:

P: every Prime ideal in $C(X)$ is maximal;

F: every Finitely generated ideal in $C(X)$ is principal;

e.d.: $C(X)$, as a lattice, is conditionally complete.

Equivalent descriptions are:

P: every zero-set in X is open;

F: for all $f \in C(X)$, pos f and neg f are completely separated;

e. d.: the closure of every open set is open

[3, 1H, 3N, 4J, 14.26]. It is clear from the second list that all P-spaces and all e.d. spaces are F-spaces. On the other hand, the two stronger properties are independent (as is illustrated below). Moreover, the triviality that any discrete space is an e.d. P-space has, for most practical purposes, a valid converse: ISBELL has proved that every e.d. P-space of nonmeasurable cardinal is discrete [3, 12H].

It is clear that if a product of two spaces is of one of the listed types, then each factor must be of that type. Also, the product of a discrete space with a space of any one of these types is again of that type. Now, RUDIN has pointed out that a product of two infinite compact spaces cannot be an F-space (see the preceding paper [1]). As infinite compact F-spaces are known to exist (see below), it follows that a product of two F-spaces can fail to be an F-space. On the other hand, a product of two P-spaces is always a P-space. CURTIS and HENRIKSEN have shown that if a product of two spaces is an F-space, then at least one factor must be a P-space [1]. A natural question (which they raise) is, then: is a product of a P-space with an F-space always an F-space?

The CURTIS-HENRIKSEN result combines with ISBELL's to yield: barring measurable cardinals, a product of two spaces is e.d. if and only if one factor is e.d. and the other discrete.

The infinite compact space $\beta\mathrm{N}$ is not only an F-space, but also e.d. (since N is); hence a product of two e.d. spaces need not be an F-space. The example constructed

[1]) Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

[2]) Notation and terminology are as in [3]. References to original sources are also contained in [3].

below helps to round out the picture: X is a P-space, Y is e.d. (hence an F-space), but $X \times Y$ is not an F-space; moreover, each factor misses being discrete by only one point. What is still lacking is a necessary and sufficient condition that a product of two spaces be an F-space[3]).

Let D denote the discrete space whose points are the countable ordinals. Pick a new object p, and define

$$X = D \cup \{p\},$$

with deleted neighborhoods of p the complements of countable sets (and with D discrete in the relative topology). It is easily seen that this defines X as a completely regular space (notice that all neighborhoods of p are open-and-closed). It is clear that every G_δ containing p is a neighborhood of p, and hence that X is a P-space.

Next, select any point q in βD such that every neighborhood of q intersects D in an uncountable set. (The family of all subsets of D whose complements are countable is contained in some ultrafilter $\mathfrak{U}$; take $q = \lim \mathfrak{U}$.) Define

$$Y = D \cup \{q\},$$

with the relative topology of βD. Then Y is dense in the e.d. space βD and hence is e.d.

Since D is realcompact [3, 8.18 or Ch. 12], there exists a function g in $C(Y)$ that vanishes at q but nowhere on D [3, 8.8]. Define h on $X \times Y$ as follows:

$$\begin{aligned} h(\alpha, \alpha) &= g(\alpha) && \text{for } \alpha \in D, \\ h(\alpha+1, \alpha) &= -g(\alpha) && \text{for } \alpha \in D, \\ h(x, y) &= 0 && \text{everywhere else.} \end{aligned}$$

Since h assumes at most two nonzero values on any cross-section, it is continuous at each point $\neq (p, q)$. To verify continuity at (p, q), let $\varepsilon > 0$ be given. Choose a neighborhood V of q in Y such that $|g(y)| < \varepsilon$ for all $y \in V$. Then $|h(x, y)| < \varepsilon$ for all (x, y) belonging to the neighborhood $X \times V$ of (p, q).

Finally, we prove that h changes sign in every neighborhood of (p, q), which implies that $X \times Y$ is not an F-space (or even an F'-space; see [1] or [2, 8.12]). For $\sigma \in D$, define

$$U_\sigma = \{\alpha \in D : \alpha \geqq \sigma\}.$$

Given any neighborhood W of (p, q), there exist $\sigma \in D$, and a neighborhood V of q in Y, such that

$$U_\sigma \times V \subset W.$$

Since V is not countable, there exists $\alpha \in D \cap V$ satisfying $\alpha \geqq \sigma$, i.e., $\alpha \in U_\sigma$. Then $\alpha + 1 \in U_\sigma$, and so both (α, α) and $(\alpha + 1, \alpha)$ belong to W. But h has opposite signs at these points.

---

[3]) There is a similar lack regarding the related *basically disconnected* spaces, i.e., those X for which $C(X)$ is conditionally σ-complete, or, equivalently, such that cl pos f is open for all f [3, 3N].

Remark. If the space Y in this example is replaced by its denumerable analogue, then the resulting product space is not only an F-space but is basically disconnected[3]); the details are supplied in [2, 8.11].

References

[1] P. C. Curtis, Jr., A note concerning certain product spaces. Arch. Math. **11**, 50—52 (1960).
[2] L. Gillman and M. Henriksen, Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal. Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 366—391 (1956).
[3] L. Gillman and M. Jerison, Rings of continuous functions. Princeton, Van Nostrand 1960.

Eingegangen am 27. 7. 1959

Bemerkungen zur Homotopietheorie der Koinzidenzen mehrerer Abbildungen

Von Helga Schirmer in Fredericton (Canada)

1. Einleitung. Das Ziel dieser Note ist die Verallgemeinerung einiger Eigenschaften der Koinzidenzen zweier Abbildungen einer Mannigfaltigkeit M in eine Mannigfaltigkeit N mit $\dim M = \dim N$ (vgl. z. B. [2, 6]) auf den Fall von r Abbildungen ($r \geqq 2$) von M in N, wenn $\dim M = (r - 1) \dim N$ ist. Der Index einer regulären Koinzidenz wird so definiert, daß er wie gewöhnlich eine ganze Zahl ist und sein Wert im Falle $r = 2$ mit dem in [2] und [6] angegebenen übereinstimmt. Die Homotopieinvarianz der algebraischen Koinzidenzzahl wird in Abschnitt 3 untersucht. In Abschnitt 4 werden Abbildungen mit vorgeschriebenen Koinzidenzen sowie mit der Mindestzahl von Koinzidenzen innerhalb einer vorgeschriebenen Homotopieklasse konstruiert.

Wir beschränken uns jedoch stets auf den Fall $\pi_1(N) = 0$, um bedeutend kürzere Beweise als die zu den in [6] analogen geben zu können. Das wesentlichste Hilfsmittel ist hierbei die Theorie der Hindernisse für Deformationen einer Abbildung (vgl. z. B. [1]), die für einige verwandte Probleme im Falle $r = 2$ bereits von Fuller [3] verwendet wurde. r Abbildungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ von M in N definieren eine Abbildung F von M in das r-fache Cartesische Produkt $N^{(r)}$ von N mit sich selbst. Den Koinzidenzen von $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ entsprechen die Punkte $x \in M$ mit $F(x) \in D$, wobei D die Diagonale von $N^{(r)}$ bezeichnet. Das Koinzidenzverhalten der Abbildungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ hängt ab von den Hindernissen für die Deformation der Abbildung F in $N^{(r)}$ zu einer Abbildung in $N^{(r)} - D$. Die einschränkende Voraussetzung $\pi_1(N) = 0$ wird vor allem bei der Bestimmung der Koeffizientengruppen $\pi_p(N^{(r)}, N^{(r)} - D)$ dieser Hindernisse gebraucht.

Die Einschränkung $\pi_1(N) = 0$ hat zur Folge, daß die Koinzidenz-Mindestzahl innerhalb einer gegebenen Abbildungsklasse stets $\leqq 1$ ist, so daß die Konstruktion von r Abbildungen mit vorgegebener oder minimaler Koinzidenzzahl vereinfacht wird. Der allgemeine Fall kann mit zu [6] analogen Methoden behandelt werden.

2. Hindernisse für koinzidenzfreie Deformationen. Wir geben zunächst eine Zusammenstellung der im folgenden verwendeten Definitionen und Eigenschaften der Hindernisse für Deformationen (vgl. z. B. [1]). Auf die Beweise wurde verzichtet, da sie mit den üblichen Methoden der Hindernistheorie erbracht werden können.

Seien X ein endlicher Komplex (definiert wie in [7], S. 100), X^p sein p-dimensionales Gerüst und Y ein topologischer Raum, mit Unterraum $B \subset Y$. Eine Abbildung f von X in Y heiße *p-deformierbar*, wenn eine zu f homotope Abbildung f' von der Form

$f' : (X, X^p) \to (Y, B)$ existiert. Wir werden es im weiteren stets mit dem Fall $\pi_1(B) = 0$ zu tun haben, so daß die Festlegung von Basispunkten unnötig ist. Dann definiert eine Abbildung $f : (X, X^{p-1}) \to (Y, B)$ eindeutig eine Kokette

$$z^p(f) \in C^p(X; \pi_p(Y, B)),$$

die jeder orientierten p-Zelle e^p von X das durch $f|e^p : (e^p, \dot{e}^p) \to (Y, B)$[1] bestimmte Element von $\pi_p(Y, B)$ zuordnet. $z^p(f)$ ist tatsächlich ein Kozyklus und heißt das *erste Hindernis* zu einer p-Deformation von f. Dann und nur dann, wenn $z^p(f) = 0$ ist, hat f eine p-Deformation $f' : (X, X^p) \to (Y, B)$ rel. X^{p-1}, d. h. es existiert eine Homotopie $f(t) : (X, X^{p-1}) \to (Y, B)$, $0 \leqq t \leqq 1$, mit $f(0) = f$, $f(1) = f'$. Das *zweite Hindernis* für eine $(p + 1)$-Deformation von f ist dann die nur von f, nicht von der Deformation f' abhängige Kohomologieklasse $\{z^{p+1}(f')\} \in H^{p+1}(X; \pi_{p+1}(Y, B))$ von $z^{p+1}(f')$, und es gilt:

(2.1) *f ist dann und nur dann $(p+1)$-deformierbar rel. X^{p-1}, wenn $\{z^{p+1}(f')\} = 0$ ist.*

Jede Homotopie $f(t) : (X, X^{p-2}) \to (Y, B)$, $0 \leqq t \leqq 1$, zwischen zwei Abbildungen $f(0) = f$, $f(1) = g : (X, X^{p-1}) \to (Y, B)$ bestimmt in der üblichen Weise eine Separations-Kokette $d^{p-1}(f, g) \in C^{p-1}(X; \pi_p(Y, B))$ mit den Eigenschaften:

(2.2) $\delta d^{p-1}(f, g) = z^p(f) - z^p(g)$;

(2.3) *zu jeder vorgegebenen Abbildung $f : (X, X^{p-1}) \to (Y, B)$ und vorgegebenen Kokette $c^{p-1} \in C^{p-1}(X; \pi_p(Y, B))$ gibt es eine Homotopie $f(t) : (X, X^{p-2}) \to (Y, B)$, $0 \leqq t \leqq 1$, so daß $f(0) = f$, $f(1) = g$ von der Form $g : (X, X^{p-1}) \to (Y, B)$ und $d^{p-1}(f, g) = c^{p-1}$ ist.*

Im weiteren wird stets gelten, daß $\pi_i(Y, B) = 0$ für $i < m$ ist, mit $m = \dim X$. Jede Abbildung f von X in Y ist dann $(m-1)$-deformierbar, das Hindernis für eine m-Deformation von f ist eine eindeutig bestimmte Klasse

$$\{z^m\} \in H^m(X; \pi_m(Y, B)),$$

und f ist m-deformierbar dann und nur dann, wenn $\{z^m\} = 0$ ist.

Wir wenden nun diese Resultate auf Koinzidenzprobleme an. r Abbildungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : X \to Y$ $(r \geqq 2)$ bestimmen auf natürliche Weise eine Abbildung

$$F = (f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}) : X \to Y^{(r)}$$

von X in das r-fache Cartesische Produkt von Y mit sich selbst. Bezeichnet D die Diagonale von $Y^{(r)}$, so sind die Koinzidenzen von $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ genau die Punkte $x \in X$ mit $F(x) \in D$, und $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ ist koinzidenzfrei, wenn $F(X) \subset Y^{(r)} - D$ ist. Die Entscheidung, ob ein gegebenes r-tupel von Abbildungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : X \to Y$ eine koinzidenzfreie Deformation besitzt, hängt daher von Hindernissen für Deformationen von Abbildungen in $Y^{(r)}$ zu Abbildungen in $Y^{(r)} - D$ ab. Diese sind Elemente von $Z^p(X; \pi_p(Y^{(r)}, Y^{(r)} - D))$ und Faktorgruppen von Untergruppen dieser Gruppe.

Die Bestimmung der Koeffizientengruppe $\pi_p(Y^{(r)}, Y^{(r)} - D)$ führen wir unter

---

[1]) Wir bezeichnen mit e^p eine abgeschlossene Zelle, mit $\dot{e}^p$ ihren Rand und mit $e^p = e^p - \dot{e}^p$ ihr Inneres. Ist U eine offene Menge, so bezeichnet $\bar{U}$ ihre abgeschlossene Hülle.

den folgenden Voraussetzungen durch: Y ist eine kompakte n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (kurz: n-Mannigfaltigkeit) N, die einfach zusammenhängend (d. h. bogenweise zusammenhängend und $\pi_1(N) = 0$) ist. N besitzt also eine Überdeckung $\{V\}$ mit (offenen) n-Elementen.

Bezeichne φ die Einschränkung auf $N^{(r)} - D$ der Projektion von $N^{(r)}$ auf einen seiner Faktoren N, und sei $N^{(r-1)}$ das Produkt der restlichen $(r-1)$ Faktoren.

Hilfssatz 2.4. *$N^{(r)} - D$ ist ein Faserraum mit Basis N, Faser $N^{(r-1)} - p_0$, wobei p_0 ein beliebiger aber fester Punkt von $N^{(r-1)}$ ist, und Projektion φ.*

Beweis. Wir benutzen den Begriff „Faserraum" in dem folgenden Sinn (vgl. z. B. [4]): Der topologische Raum E heiße Faserraum, mit Basis B, Faser F und Projektion $\varphi: E \to B$ von E auf B, wenn gilt:

(i) $\varphi^{-1}(b)$ ist homöomorph zu F für alle Punkte $b \in B$,

(ii) es gibt eine offene Überdeckung $\{U\}$ von B so, daß zu jedem $U \in \{U\}$ ein Homöomorphismus $\psi: U \times F \to \varphi^{-1}(U)$ existiert mit $\psi(a, b) \in \varphi^{-1}(b)$, für alle $b \in U$, $a \in F$.

Wählt man φ wie vor dem Hilfssatz angegeben, so ist $\varphi^{-1}(b) = N^{(r-1)} - p$, für $b \in N$, wobei p ein von b abhängiger Punkt aus $N^{(r-1)}$ ist, und alle diese Räume sind offensichtlich homöomorph. Weiter besitzt N nach Definition eine Überdeckung mit offenen n-Elementen, und es ist leicht einzusehen, daß diese der Eigenschaft (ii) genügt[2]).

Hilfssatz 2.5. *Die Injektion*

$$i: (N^{(r-1)} \times b; (N^{(r-1)} - b^*) \times b) \subset (N^{(r)}, N^{(r)} - D),$$

wobei $b \in N$ beliebig und $b^* = b^{(r-1)} \in N^{(r-1)}$, induziert Isomorphismen

$$i_*: \pi_p(N^{(r-1)}, N^{(r-1)} - b^*) \cong \pi_p(N^{(r)}, N^{(r)} - D)$$

für alle p und r.

Der Beweis ist analog zum Beweis von Theorem 1 in [3], wo der Fall $r = 2$ behandelt wird, und folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_p(N^{(r-1)}, N^{(r-1)} - b^*) \arrow[rr, "i_*"] & & \pi_p(N^{(r)}, N^{(r)} - D) \arrow[dr, "j_*"] & \\
{}_1(N^{(r)}; N^{(r-1)}, N^{(r)} - D) \arrow[ur, "\beta_+"] \arrow[dr, "\beta_-"'] & & & & \pi_p(N^{(r)}; N^{(r-1)}, N^{(r} \\
 & \pi_p(N^{(r)} - D, N^{(r-1)} - b^*) \arrow[rr, "i'_*"] \arrow[dr, "\varphi_*"'] & & \pi_p(N^{(r)}, N^{(r-1)}) \arrow[ur, "j'_*"'] \arrow[dl, "\varphi'_*"] & \\
 & & \pi_p(N) & &
\end{tikzcd}$$

Hier bezeichnen $\beta_+, \beta_-, i_*, i'_*, j_*, j'_*$ die Homomorphismen der exakten oberen und unteren Sequenz der Triade $(N^{(r)}; N^{(r-1)}, N^{(r)} - D)$, und φ_*, φ'_* die Homomorphismen, die von den Projektionen φ und φ' der Faserräume $N^{(r)} - D$ über N resp. $N^{(r)}$ über N induziert werden. Da φ_* und φ'_* Isomorphismen sind, ist auch i'_* ein Isomorphismus. Daher ist $\pi_p(N^{(r)}; N^{(r-1)}, N^{(r)} - D) = 0$ für alle p, und i_* ist somit ein Isomorphismus.

---

[2]) Man vergleiche den Beweis eines ähnlichen Ergebnisses in Milnor [5].

Von hier an sei stets $n(r-1) = m$ gesetzt. Dann folgt aus Dimensionsbetrachtungen und im Falle $p = m$ aus der „excision property" der Homologiegruppen, daß

$$H_p(N^{(r-1)}, N^{(r-1)} - b^*) \cong \begin{cases} 0 \text{ für } p < m, \\ Z \text{ für } p = m, \end{cases}$$

wobei Z die Gruppe der ganzen Zahlen bezeichnet. Daher ergibt der Hurewicz-Isomorphismus, daß

$$\pi_p(N^{(r)}, N^{(r)} - D) \cong \begin{cases} 0 \text{ für } p < m \\ Z \text{ für } p = m \end{cases} \quad (m \geqq 3). \tag{2.6}$$

Falls $m \geqq 3$, folgt aus der Voraussetzung $\pi_1(N) = 0$, daß $\pi_1(N^{(r)} - D) = 0$, so daß die Vernachlässigung der Basispunkte gerechtfertigt ist. Jede Abbildung F von X nach $N^{(r)}$ ist wegen (2.1) und (2.6) $(m-1)$-deformierbar, und falls zusätzlich $\dim X = m$, ist F m-deformierbar dann und nur dann, wenn das Hindernis

$$\{z^m(F)\} \in H^m(X; \pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D))$$

verschwindet. Sei

$$\tau_* : H^m(X; \pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D)) = H^m(X; Z) \tag{2.7}$$

der durch (2.6) induzierte Isomorphismus. Dann gilt

Satz 2.8. *Ist X ein endlicher Komplex mit $\dim X = n(r-1) = m$ und N eine einfach zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit, so ist das r-tupel von Abbildungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : X \to N$ homotop zu einem koinzidenzfreien r-tupel dann und nur dann, wenn das von ihm bestimmte Element $\tau_* \{z^m(F)\} \in H^m(X; Z)$ verschwindet*[3]).

3. Homotopieinvarianz der algebraischen Koinzidenzzahl. Der Index einer Koinzidenz zweier Abbildungen ist nur für eine reguläre Koinzidenz definiert (vgl. [2], [6]). Wir behandeln daher zunächst reguläre Koinzidenzen von r Abbildungen.

Definition 3.1. *Gegeben sei ein r-tupel von Abbildungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : X \to Y$ eines m-dimensionalen Komplexes X in einen topologischen Raum Y. Dann heißt eine Koinzidenz $x \in X$ von $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ „regulär", falls $x \in e^m$, $e^m \subset X$, und $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ koinzidenzfrei auf $e^m - x$ ist. Das r-tupel $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ heißt regulär, falls alle seine Koinzidenzen regulär sind.*

Wir zeigen zunächst, daß unter geeigneten Voraussetzungen jedes r-tupel von Abbildungen zu einem regulären homotop ist:

Satz 3.2. *Seien X ein endlicher Komplex, N eine einfach zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit und $\dim X = n(r-1)$. Dann ist jedes r-tupel von Abbildungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : X \to N$ zu einem regulären homotop.*

Beweis. Zufolge Abschnitt 2 ist die Abbildung $F = (f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}) : X \to N^{(r)}$ zunächst zu einer Abbildung $F' : (X, X^{m-1}) \to (N^{(r)}, N^{(r)} - D)$ deformierbar, wobei wieder $m = n(r-1)$ ist. Unter Festlassung auf X^{m-1} wird nun F' innerhalb der m-Zellen von X zu einer regulären Abbildung deformiert[4]). Benutzt wird hierzu die

---

[3]) Für die Fälle $m < 3$ kann das Ergebnis leicht auf direktem Wege bestätigt werden.

[4]) Wir übertragen die Bezeichnungen „Koinzidenz", „regulär" usw. auf die von einem r-tupel $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : X \to N$ bestimmte Abbildung $F : X \to N^{(r)}$.

Injektion

(3.3) $$\iota : \pi_m(W \times b, \dot{W} \times b) \to \pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D),$$

bei der W eine zu einem abgeschlossenen m-Element E^m homöomorphe Umgebung von b^* in $N^{(r-1)}$ bezeichnet; nach (2.6) ist ι ein Isomorphismus.

Sei e^m eine m-Zelle von X. Wir führen in ihr Polarkoordinaten (y, s), $0 \leqq s \leqq 1$, so ein, daß $(y, 1) \in \dot{e}^m$ ist; sei $(y, 0) = x$. Nach (3.3) existiert eine Homotopie

$$g(y, s; t) : (e^m, \dot{e}^m) \to (N^{(r)}, N^{(r)} - D), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

so daß $g(y, s; 0) = F'|e^m$ und $g(y, s; 1)$ von der Form

$$g(y, s; 1) : (e^m, \dot{e}^m) \to (W \times b, \dot{W} \times b)$$

ist. $g' : e^m \to N^{(r)}$ sei definiert durch

$$g'(y, s) = \begin{cases} g(y, 2s; t) & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq 1/2, \\ g(y, 1; 2 - 2s) & \text{für} \quad 1/2 \leqq s \leqq 1. \end{cases}$$

Dann ist $g'(y, s)$ zu $g(y, s; 0)$ homotop unter Festlassung auf $\dot{e}^m$, und mit

$$e^m_{\frac{1}{2}} = \{(y, s) \in e^m | 0 \leqq s \leqq 1/2\} \quad \text{ist} \quad g'(e^m - e^m_{\frac{1}{2}}) \subset N^{(r)} - D \quad \text{und} \quad g'(e^m_{\frac{1}{2}}) \subset W \times b.$$

Eine Abbildung $g'' : e^m \to N^{(r)}$ wird dadurch definiert, daß $g''(y, s) = g'(y, s)$ ist für $1/2 \leqq s \leqq 1$, und daß $g''(y, s)$ für $0 \leqq s \leqq 1/2$ der Punkt auf $\overline{b' \times b, g'(y, s)}$ ist mit $\overline{b' \times b, g''(y, s)} : \overline{b' \times b, g'(y, 1/2)} = 2s$, wobei die Entfernungen in der Euklidischen Metrik von $W \times b$ gemessen werden. Dann ist g'' von der Form

$$g'' : (e^m, e^m - e^m_{\frac{1}{2}}, e^m_{\frac{1}{2}} - x) \to (N^{(r)}, N^{(r)} - D, (W - b') \times b),$$

hat also nur eine — somit reguläre — Koinzidenz. Ferner ist g'' homotop zu g' und daher auch zu $F'|e^m$ unter Festlassung auf $\dot{e}^m$. Die Abbildung $G|e^m$ sei bestimmt durch $G|e^m = g''$.

Wird auf diese Weise F' in allen m-Zellen e^m von X abgeändert, so erhält man eine Abbildung $G : (X, X^{m-1}) \to (N^{(r)}, N^{(r)} - D)$, die ein r-tupel $g^{(1)}, \ldots, g^{(r)} : X \to N$ mit den verlangten Eigenschaften bestimmt.

Bemerkung. Mit zu den in [6] verwendeten ähnlichen Methoden läßt sich schärfer zeigen, daß unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 die regulären r-tupel überall dicht sind und daß zwei reguläre und homotope r-tupel $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ und $g^{(1)}, \ldots, g^{(r)} : X \to N$ durch eine reguläre Homotopie verbunden werden können, d. h. durch eine Homotopie $f^{(1)}(t), \ldots, f^{(r)}(t) : X \to N$, $0 \leqq t \leqq 1$, so daß $f^{(i)}(0) = f^{(i)}$, $f^{(i)}(1) = g^{(i)}$, $i = 1, \ldots, r$, und $f^{(1)}(t), \ldots, f^{(r)}(t)$ regulär ist für jedes $0 \leqq t \leqq 1$.

Um den Index einer regulären Koinzidenz $x \in e^m \subset X$ unter $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : X \to N$ zu definieren, nehmen wir zu den Voraussetzungen von Satz 3.2 zusätzlich an, daß N orientiert ist. Ferner legen wir eine Orientierung der m-Zellen von X fest.

Sei U eine Umgebung von x in e^m, so daß $\bar{U}$ ein abgeschlossenes n-Element und so klein ist, daß $f^{(i)}(\bar{U}) \subset V$, $i = 1, \ldots, r$, wobei V ein Mitglied einer Überdeckung $\{V\}$ von N durch offene n-Elemente ist. Mit $F = (f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}) : X \to N^{(r)}$ definiert $F|\dot{U}$ ein Element $\alpha(x) \in \pi_{m-1}(V^{(r)} - D)$. Sei $F(x) = b^{(r)}$. Da V ein n-Element ist,

existiert ein Isomorphismus

(3.4) $$\varrho : \pi_{m-1}(V^{(r)} - D) \cong Z .$$

Er sei induziert durch eine Deformations-Retraktion von $V^{(r)} - D$ auf eine in $V^{(r-1)} \times b$ gelegene Sphäre S^{m-1} mit dem Mittelpunkt $b^{(r)}$, wobei $V^{(r-1)}$ dem Produkt der ersten $(r-1)$ Faktoren von $V^{(r)}$ entsprechen soll und die Orientierung von S^{m-1} die von der Orientierung von N induzierte ist, und einen nachfolgenden Isomorphismus von $\pi_{m-1}(S^{m-1})$ mit Z. Dann sei der *Index* $j(x) = j(x; f^{(1)}, \ldots, f^{(r)})$ definiert durch $j(x) = \varrho\alpha(x)$. Er ist also wie üblich eine ganze Zahl.

Wir legen nun den Isomorphismus in (2.6), Fall $p = m$, genauer fest. In

$$\pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D) \xleftarrow{i_*} \pi_m(V^{(r)}, V^{(r)} - D) \xrightarrow{\partial} \pi_{m-1}(V^{(r)} - D) \xrightarrow{\varrho} Z$$

bezeichne i_* die Injektion, ∂ den Randhomomorphismus und ϱ den Homomorphismus (3.4). i_*, ∂ und ϱ sind Isomorphismen, und wir definieren den Isomorphismus (2.6) durch

(3.5) $$\tau = \varrho\,\partial\, i_*^{-1} : \pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D) \cong Z .$$

Dann ist nach Definition

(3.6) $$j(x; f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}) = \tau_{\#}\, z^m(F)\,(e^m) ,$$

wobei $\tau_{\#} : Z^m(X; \pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D)) \cong Z^m(X; Z)$ und $z^m(F)$ der Hinderniskozyklus von F ist.

Sei die Kette $c_m(X) \in C_m(X; Z)$ definiert durch $c_m(X) = \sum\limits_{\lambda} e_\lambda^m$, wobei sich die Summe über alle (fest orientierten) m-Zellen von X erstreckt. Dann ist zufolge (3.6) der Kronecker-Index

(3.7) $$j(f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}) = \tau_{\#}\, z^m(F) \cdot c_m(X)$$

gleich der Summe der Indexe der Koinzidenzen des regulären r-tupels $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$, und wir definieren daher $j(f^{(1)}, \ldots, f^{(r)})$ als die „*algebraische Koinzidenzzahl*" von $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$.

Durch (3.6) wird der Zusammenhang zwischen dem Wert des Hindernisses auf einer eine reguläre Koinzidenz enthaltenden Zelle und dem Index dieser Koinzidenz deutlich. Das Hindernis verschwindet, falls sich die Koinzidenz durch eine beliebige Deformation, der Index, falls sie sich durch eine „kleine" Deformation beseitigen läßt. Nur wegen des Isomorphismus (3.5) sind diese beiden Aussagen gleichwertig.

In welchem Maße die algebraische Koinzidenzzahl homotopieinvariant ist, ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Seien $F = (f^{(1)}, \ldots, f^{(r)})$ und $G = (g^{(1)}, \ldots, g^{(r)})$ zwei reguläre und homotope Abbildungen von X nach $N^{(r)}$. Da $(N^{(r)}, N^{(r)} - D)$ von $(m-1)$-fachem Zusammenhang ist, gilt nach (2.2)

$$z^m(F) - z^m(G) = \delta\, d^{m-1}(F, G) ,$$

mit $d^{m-1}(f, g) \in C^{m-1}(X; \pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D))$, und daher nach (3.7)

(3.8) $$\begin{aligned} &j(f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}) - j(g^{(1)}, \ldots, g^{(r)}) = \\ &= \tau_{\#}\,[z^m(F) - z^m(G)] \cdot c_m(X) = \\ &= \tau_{\#}\, \delta\, d^{m-1}(F, G) \cdot c_m(X) = \tau_{\#}\, d^{m-1}(F, G) \cdot \partial c_m(X) . \end{aligned}$$

Da zufolge (2.3) $\tau_{\#} d^{m-1}(F, G)$ jeden beliebigen Wert in $C^{m-1}(X; Z)$ annehmen kann, ist die algebraische Koinzidenzzahl im allgemeinen nicht homotopieinvariant. Sie ist es dann und nur dann, wenn $\partial c_m(X) = 0$ ist. Insbesondere gilt

Satz 3.9. *Zwei homotope und reguläre r-tupel von Abbildungen einer orientierten geschlossenen endlichen m-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit in eine orientierte einfach zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit haben dieselbe algebraische Koinzidenzzahl.*

Wir können in diesem Fall also von der algebraischen Koinzidenzzahl eines beliebigen r-tupels $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ sprechen, wenn wir darunter die algebraische Koinzidenzzahl irgend eines (nach Satz 3.2 existierenden) regulären r-tupels in der Homotopieklasse von $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ verstehen.

Bemerkung. Falls $r = 2$ und X eine orientierte und triangulierte n-Mannigfaltigkeit ist, hat $j(x; f^{(1)}, f^{(2)})$ denselben Wert wie den in [2] und [6] definierten. Dies kann etwa auf folgendem Wege eingesehen werden: Nach Definition von $j(x; f^{(1)}, f^{(2)})$ gilt $x \in U \subset X$ und $f^{(1)}(\bar{U}) \cup f^{(2)}(\bar{U}) \subset V \subset N$, wobei U und V n-Elemente sind. Man wähle nun ein Abbildungspaar $g^{(1)}, g^{(2)}: X \to N$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $g^{(i)} = f^{(i)}$ auf $X - U$, $i = 1, 2$,

(ii) $g^{(i)}$ ist homotop zu $f^{(i)}$ unter Festlassung auf $X - U$, $i = 1, 2$,

(iii) $g^{(1)}, g^{(2)}$ ist koinzidenzfrei auf $\bar{U} - x$,

(iv) $g^{(2)}(U_0) = g^{(1)}(x)$, wobei $\bar{U}_0 \subset U$ und $\bar{U}_0$ zu einem abgeschlossenen n-Element homöomorph ist.

Die Existenz von $g^{(1)}, g^{(2)}$ ist leicht zu zeigen (vgl. den Beweis von Satz 3.2). Bezeichnet man für den Augenblick den in [6] definierten Index mit $\bar{j}(x)$, so folgt aus [6], Satz IV, daß $\bar{j}(x; f^{(1)}, f^{(2)}) = \bar{j}(x; g^{(1)}, g^{(2)})$ ist. Benutzen wir, mit $G = (g^{(1)}, g^{(2)}): X \to N \times N$, $G|\dot{U}_0$ für die Definition von $j(x; g^{(1)}, g^{(2)})$ und $\mathfrak{z} = \dot{U}_0$ für die Definition von $\bar{j}(x; g^{(1)}, g^{(2)})$, so ist es klar, daß $j(x; g^{(1)}, g^{(2)}) = \bar{j}(x; g^{(1)}, g^{(2)})$ ist. Satz 3.9 ergibt daher $j(x; f^{(1)}, f^{(2)}) = \bar{j}(x; f^{(1)}, f^{(2)})$.

Ist $r = 2$ und $f^{(2)}$ die Identität, so hat $j(x; f^{(1)}, f^{(2)})$ denselben Wert wie der Fixpunktindex von x unter $f^{(1)}$.

4. Abbildungen mit gegebenen Koinzidenzen; Koinzidenz-Mindestzahl. Bei der Konstruktion von Abbildungen mit vorgegebenen Koinzidenzen benutzen wir die

Definition 4.1. *Eine Zahl α heiße „realisierbar" in bezug auf den Komplex X und die einfach zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit N, falls eine Abbildung $F: (X, X^{m-1}) \to (N^{(r)}, N^{(r)} - D)$ (mit $m = n(r-1)$) existiert mit $\tau_{\#} z^m(F) \cdot c_m(X) = \alpha$.*

Offensichtlich gilt

Hilfssatz 4.2. *Ist α realisierbar in bezug auf X und N, so ist α auch realisierbar in bezug auf X_1 und N für jede Unterteilung X_1 von N.*

Auf die Frage, wann eine Zahl realisierbar ist, gehen wir hier nicht ein, sondern begnügen uns mit dem Beweis des folgenden Satzes.

Satz 4.3. *Gegeben seien die Punkte x_λ, $\lambda = 1, \dots, k$, einer endlichen m-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit M, die Zahlen $j(x_\lambda)$, $\lambda = 1, \dots, k$, und eine einfach zusammen-*

hängende n-Mannigfaltigkeit N. Dann und nur dann wenn

$$\alpha = \sum_{\lambda=1}^{k} j(x_\lambda)$$

realisierbar in bezug auf M und N ist, existieren r Abbildungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : M \to N$, *die genau die Punkte* x_λ *zu Koinzidenzen mit den Indexen* $j(x_\lambda)$ *haben.*

Beweis. Wir wählen, falls nötig, eine Unterteilung M_1 von M so, daß für alle Punkte x_λ gilt: $x_\lambda \in e_\lambda^m$, mit $e_\lambda^m \neq e_\varkappa^m$ für $\lambda \neq \varkappa$, und definieren

$$z_0^m \in Z^m(M_1; \pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D))$$

durch

$$z_0^m(e^m) = \begin{cases} \overset{-1}{\tau\#}\, j(x_\lambda) & \text{falls } e^m = e_\lambda^m, \\ 0 & \text{falls } e^m \neq e_\lambda^m, \end{cases} \qquad \lambda = 1, \ldots, k. \tag{4.4}$$

Dann ist

$$\tau\#\, z_0^m \cdot c_m(M_1) = \alpha. \tag{4.5}$$

Ist α realisierbar, so existiert nach Definition 4.1 und Hilfssatz 4.2 eine Abbildung $F' : (M_1, M_1{}^{m-1}) \to (N^{(r)}, N^{(r)} - D)$ mit

$$\tau\#\, z^m(F') \cdot c_m(M_1) = \alpha. \tag{4.6}$$

Da M_1 eine Pseudomannigfaltigkeit ist, folgt aus (4.5) und (4.6), daß

$$z^m(F') - z_0^m = \delta c^{m-1}, \quad \text{mit} \quad c^{m-1} \in C^{m-1}(M_1; \pi_m(N^{(r)}, N^{(r)} - D)),$$

ist. Nach (2.3) existiert eine zu F' homotope Abbildung

$$F'' : (M_1, M_1^{m-1}) \to (N^{(r)}, N^{(r)} - D) \quad \text{mit} \quad d^{m-1}(F', F'') = c^{m-1};$$

für sie gilt also

$$z^m(F'') = z^m(F') - \delta d^{m-1}(F', F'') = z_0^m.$$

Unter Festlassung auf M_1^{m-1} ändern wir nun F'' innerhalb der m-Zellen e_λ^m $(\lambda = 1, \ldots, k)$ von M_1 wie beim Beweis von Satz 3.2 so zu einer Abbildung F ab, daß $F|e_\lambda^m : (e_\lambda^m, e_\lambda^m - x_\lambda) \to (N^{(r)}, N^{(r)} - D)$, $\lambda = 1, \ldots, k$, ist; innerhalb der von e_λ^m verschiedenen Zellen e^m kann F'' wegen (4.4) so zu F deformiert werden, daß $F|e^m : e^m \to N^{(r)} - D$ ist. Dann definiert F ein r-tupel $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)} : M \to N$ mit den verlangten Eigenschaften.

Die Umkehrung ist trivial.

Wir haben durchweg $\pi_1(N) = 0$ vorausgesetzt. In Analogie zu den für $r = 2$ bewiesenen Ergebnissen (vgl. [2], [6]) erwartet man daher, daß die Mindestzahl μ von Koinzidenzen innerhalb der Homotopieklasse eines gegebenen r-tupels von Abbildungen hier ≤ 1 ist. Ist M berandet, so ist $H^m(M; Z) = 0$, also wegen Satz 2.8 stets $\mu = 0$. Ist M geschlossen und orientierbar, so folgt aus den Sätzen 3.9 und 4.3

Satz 4.7. *Zu jedem gegebenen r-tupel* $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ *von Abbildungen einer orientierten geschlossenen endlichen m-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit M in eine einfach zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit N gibt es ein homotopes r-tupel*

$$g^{(1)}, \ldots, g^{(r)} : M \to N$$

so, daß $g^{(1)}, \ldots, g^{(r)}$ *koinzidenzfrei ist, falls* $j(f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}) = 0$, *und daß* $g^{(1)}, \ldots, g^{(r)}$ *genau eine Koinzidenz* $x \in M$ *hat mit dem Index* $j(x; g^{(1)}, \ldots, g^{(r)}) = j(f^{(1)}, \ldots, f^{(r)})$, *falls* $j(f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}) \neq 0$ *ist.*

Ist M geschlossen, aber nicht orientierbar, so gilt diese Aussage mod 2.

Literaturverzeichnis

[1] A. L. BLAKERS and W. S. MASSEY, The homotopy groups of a triad I. Ann. of Math. **53**, 161 to 205 (1951).

[2] W. FRANZ, Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math.-Naturw. Reihe **3**, 439—443 (1953/54).

[3] F. B. FULLER, The homotopy theory of coincidences. Ann. of Math. **59**, 219—226 (1954).

[4] P. J. HILTON, An introduction to homotopy theory. Cambridge Univ. Press 1953.

[5] J. MILNOR, Groups which act on S^n without fixed points. Amer. J. Math. **79**, 623—630 (1957).

[6] H. SCHIRMER, Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten. J. reine angew. Math. **194**, 21—39 (1955).

[7] N. E. STEENROD, The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press 1951.

Eingegangen am 10. 9. 1959

Ein Satz über stetige Funktionen auf der Kugelfläche

Von H. Hadwiger in Bern

Es sei S die zweidimensionale euklidische Sphäre, also die gewöhnliche Kugelfläche. Für zwei Punkte $p, q \in S$ bezeichne $\varrho = \varrho(p, q)$ $[0 \leqq \varrho \leqq \pi]$ die sphärische Distanz. Für zwei antipodisch liegende Punkte p und p^* gilt also $\varrho(p, p^*) = \pi$.

In dieser Note wird ein elementarer und kurzer Beweis des folgenden Satzes skizziert:

Satz. *Sind f und g zwei stetige Funktionen auf der Kugelfläche S und wird σ $[0 \leqq \sigma \leqq \pi]$ vorgegeben, so lassen sich zwei Punkte $p, q \in S$ so finden, daß die vier Bedingungen $\varrho(p,q) = \sigma$, $f(p) = f(q)$, $g(p) = g(p^*)$, $g(q) = g(q^*)$ erfüllt sind.*

Das Besondere dieser Aussage besteht darin, zwei bekannte Sätze über stetige Funktionen auf der Kugelfläche, die sachlich und methodisch bisher unabhängig voneinander gefunden und bewiesen worden sind, simultan als Korollarien zu enthalten. Einerseits resultiert im Sonderfall $\sigma = \pi$

Korollar I *(Theorem von Borsuk-Ulam). Sind f und g zwei stetige Funktionen auf S, so gibt es ein antipodisches Punktepaar $p, p^* \in S$ so, daß $f(p) = f(p^*)$ und $g(p) = g(p^*)$ ausfällt.*

Werden die beiden Funktionswerte $f(p)$ und $g(p)$ als kartesische Koordinaten eines Bildpunktes p' in der euklidischen Ebene E interpretiert, so wird ausgesagt, daß bei einer stetigen Abbildung von S in E zwei antipodische Punkte von S in den nämlichen Bildpunkt in E abgebildet werden. Es handelt sich um den zweidimensionalen Sonderfall eines allgemeineren topologischen Abbildungssatzes. Vgl. Alexandroff und Hopf [1], S. 486. Im Gegensatz zum höherdimensionalen Fall gibt es für den Borsuk-Ulamschen Satz für die gewöhnliche Kugelfläche elementare Beweise. Einen solchen findet man beispielsweise bei Tucker [2]. Das nämliche trifft sogar für eine von Hopf [3] stammende Verallgemeinerung zu, wobei das antipodische Punktepaar durch ein solches vorgegebener sphärischer Distanz σ $[0 < \sigma \leqq \pi]$ ersetzt ist. Vgl. hierzu auch Hadwiger [4], Satz 4.4.

Betrachten wir andererseits den Sonderfall $f \equiv g$, so ergibt sich

Korollar II *(Theorem von Dyson-Livesay). Ist f eine stetige Funktion auf S und wird σ $[0 \leqq \sigma \leqq \pi]$ vorgegeben, so gibt es zwei Punkte $p, q \in S$ derart, daß $\varrho(p,q) = \sigma$ und $f(p) = f(q) = f(p^*) = f(q^*)$ ausfällt.*

Ein einem Großkreis von S einbeschriebenes Rechteck kann also stets so in S gedreht werden, daß die Funktion f in allen vier Eckpunkten gleiche Werte annimmt. Diese Aussage wurde im speziellen Fall eines Quadrates erstmals von Dyson [5] bewiesen; die Erweiterung auf beliebige Rechtecke stammt von Livesay [6]. Die dort etwas allgemeiner gerichteten Untersuchungen verwenden spezifisch topologische Hilfsmittel. Ein in unserem Sinne elementarer Nachweis des Satzes von Dyson-Livesay ist dem Verf. bisher nicht bekannt geworden.

Beweis des Satzes. $\bar{S}$ bezeichne die Randfläche eines mit der Kugelfläche S konzentrischen Einheitswürfels. Die Punkte $p \in S$ und $\bar{p} \in \bar{S}$ sollen sich bezüglich der Zentralprojektion vom gemeinsamen Mittelpunkt aus gegenseitig entsprechen. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Die Würfeloberfläche $\bar{S}$ sei nun im Sinne der Elementargeometrie in $6n^2$ gitterförmig angeordnete abgeschlossene Quadrate $\bar{Q}$ der Seitenlänge $1/n$ zerlegt, wo n eine natürliche Zahl ist, die so groß gewählt sei, daß

$$(1) \qquad |g(p') - g(p'')| < \varepsilon/2 \quad [\bar{p}', \bar{p}'' \in \bar{Q}]$$

ausfällt, falls, wie in der Klammer vermerkt, die auf $\bar{S}$ projizierten Punkte dem gleichen Quadrat der Zerlegung angehören. Die Menge N der Quadrate sei nun in zwei sich antipodisch entsprechende Teilmengen M und M^* zerlegt, so daß für zwei auf $\bar{S}$ antipodisch liegende Quadrate $\bar{Q}, \bar{Q}^* \in N$ bei passender Bezeichnung stets $\bar{Q} \in M$ und $\bar{Q}^* \in M^*$ gilt. Diese Zerlegung von N kann so bewerkstelligt werden, daß jedes antipodische Quadratpaar $\bar{Q}, \bar{Q}^*$ wenigstens ein antipodisches Punktepaar $\bar{p}, \bar{p}^* \in \bar{S}$ so enthält, daß

$$(2) \qquad g(p) \geqq g(p^*) \quad [\bar{p} \in \bar{Q}, \bar{p}^* \in \bar{Q}^*]$$

gilt.

Mit $\bar{A} = \bigcup \bar{Q}$ $(\bar{Q} \in M)$ und $\bar{A}^* = \bigcup \bar{Q}^*$ $(\bar{Q}^* \in M^*)$ sind zwei sich antipodisch entsprechende abgeschlossene Punktmengen gegeben, die zusammen $\bar{S}$ überdecken. Der Durchschnitt $\bar{B} = \bar{A} \cap \bar{A}^*$ ist ein aus Strecken der Länge $1/n$ zusammengesetzter Streckenkomplex, dessen Eckpunkte offensichtlich lediglich die Ordnungen 2 und 4 aufweisen. Ferner entspricht sich $\bar{B}$ selbst antipodisch, so daß also $\bar{B} = \bar{B}^*$ gilt. Mit einigen Überlegungen ergibt sich, daß $\bar{B}$ einen einfach geschlossenen, sich selbst antipodisch entsprechenden Streckenzug $\bar{C}$ enthält.

In der Tat: Der bezüglich der zweidimensionalen Würfeloberfläche offene Kern von $\bar{A}$ bzw. $\bar{A}^*$ zerfällt in endlich viele offene Komponenten, wovon wenigstens eine — wir bezeichnen sie mit $\bar{U}$ bzw. $\bar{U}^*$ — einfach zusammenhängend ist. Die beiden Randkontinua von $\bar{U}$ und $\bar{U}^*$ sind einfach geschlossene Streckenzüge $\bar{V}$ und $\bar{V}^*$ im Komplex $\bar{B}$, die sich antipodisch entsprechen. Fall a: Es sollen $\bar{V}$ und $\bar{V}^*$ identisch sein. Mit $\bar{C} = \bar{V} = \bar{V}^*$ ist die Behauptung bewiesen. Fall b: Sind $\bar{V}$ und $\bar{V}^*$ nicht identisch, so können sie keine Strecke gemeinsam haben. Werden jetzt die $\bar{U}$ und $\bar{U}^*$ angehörenden Quadrate bezüglich ihrer Klassenzugehörigkeit zu den Mengen M und M^* ausgetauscht, so wird eine neue Zerlegung der Würfeloberfläche $\bar{S}$ in die Quadratmengen $\bar{A}_1$ und $\bar{A}_1^*$ gleicher Art wie die ursprüngliche erzeugt, wobei der Randstreckenkomplex $\bar{B}_1$ in $\bar{B}$ als Teil enthalten ist und genauer aus $\bar{B}$ durch Tilgung der beiden Streckenzüge $\bar{V}$ und $\bar{V}^*$ hervorgeht. Die nämliche Betrachtung kann wiederholt werden, und da sich nach endlich vielen Schritten einmal Fall a einstellen muß, schließt sich der Beweis.

Das $\bar{C}$ entsprechende Kreisbogenpolygon C auf S habe die Länge 2ω. Es gibt zwei Punkte $a, b \in C$, für die f auf C die absoluten Extrema realisiert, so daß für alle auf C liegenden Punkte p die Beziehungen

$$(3) \qquad f(a) \geqq f(p), \quad f(b) \leqq f(p) \quad [p \in C]$$

gelten. Man kann der einfach geschlossenen Kurve C einen positiven Umlaufssinn erteilen, einen Nullpunkt $z \in C$ wählen und einem beliebigen Punkt $p \in C$ als Ko-

ordinate die Länge τ zuordnen, die man im positiven Umlaufssinn von z bis p auf C mißt. Sinngemäß schreiben wir

(4) $$p = p[\tau] \quad [0 \leqq \tau \leqq 2\omega; p[0] = p[2\omega] = z].$$

Umlaufssinn und Ursprung können so gewählt werden, daß die Sachlage

(5) $$a = p[\alpha], \quad b = p[\beta] \qquad [0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \omega]$$

besteht.

Nun konstruieren wir zwei im Quadrat $0 \leqq \xi, \eta \leqq \omega$ einer Hilfsebene definierte stetige Funktionen: Es sei einerseits

(6) $$\varphi(\xi,\eta) = \varrho(p[\xi], p[\xi+\eta]) - \sigma \qquad [0 \leqq \sigma \leqq \pi],$$

wobei σ die im Satz genannte sphärische Distanz bedeutet. Andererseits sei

(7) $$\psi(\xi,\eta) = f(p[\xi]) - f(p[\xi+\eta]).$$

Hierbei machen wir die Feststellungen

(8) $$\varphi(\xi,0) = -\sigma \leqq 0; \quad \varphi(\xi,\omega) = \pi - \sigma \geqq 0,$$

(9) $$\psi(\alpha,\eta) = f(a) - f(p) \geqq 0; \quad \psi(\beta,\eta) = f(b) - f(p) \leqq 0,$$

die wir im Rechteck $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$, $0 \leqq \eta \leqq \omega$ interpretieren: Die beiden stetigen Funktionen haben je auf zwei Gegenseiten des Rechtecks gegengleiches Vorzeichen, so daß diese nach dem Nullstellensatz von Bolzano für zwei Funktionen zweier Veränderlicher im Rechteck eine gemeinsame Nullstelle aufweisen müssen. Für ein passendes Wertepaar ξ_0, η_0 gilt demnach

(10) $$\varphi(\xi_0,\eta_0) = 0; \quad \psi(\xi_0\eta_0) = 0.$$

Wenn $p[\xi_0] = p_0$ und $p[\xi_0 + \eta_0] = q_0$ gesetzt wird, ergibt sich einerseits mit (6)

(11) $$\varrho(p_0, q_0) = \sigma$$

und andererseits mit (7)

(12) $$f(p_0) = f(q_0).$$

Nun gehen wir weiter von der Bemerkung aus, daß wegen $\overline{p}_0 \in \overline{C}$ auch $\overline{p}_0 \in \overline{U} \cap \overline{V}$ gilt, wo $\overline{U}$ und $\overline{V}$ zwei Quadrate der Menge N bezeichnen, wobei $\overline{U} \in M$ und $\overline{V} \in M^*$ sein soll. Nach (2) gibt es zwei Punkte p_1 und p_2 derart, daß die Beziehungen

(13) $$g(p_1) \geqq g(p_1^*) \; [\overline{p}_1 \in \overline{U}]; \quad g(p_2) \leqq g(p_2^*) \; [\overline{p}_2 \in \overline{V}]$$

bestehen. Mit Verwendung von (1), wobei zu beachten ist, daß sowohl p_0 und p_1 als auch p_0 und p_2 sowie die antipodischen Bildpaare gleichen Quadraten angehören, folgt mit (13) leicht

(14) $$|g(p_0) - g(p_0^*)| < \varepsilon.$$

Eine analoge Betrachtung ist auch für q_0 möglich, wobei

(15) $$|g(q_0) - g(q_0^*)| < \varepsilon$$

gefolgert werden kann.

Die mit (11), (12), (14) und (15) ausgedrückten Tatbestände lassen sich für jedes $\varepsilon > 0$ realisieren. Mit Rücksicht auf Stetigkeit der Funktionen und Kompaktheit der Kugelfläche ergibt sich die Existenz eines Punktepaares $p, q \in S$, für das die in der Behauptung des Satzes aufgeführten vier Bedingungen erfüllt sind. Damit ist der Beweis beendet.

Literaturverzeichnis

[1] P. ALEXANDROFF und H. HOPF, Topologie I. J. Springer, Berlin 1935.
[2] A. W. TUCKER, Some topological properties of disk and sphere. Proc. of the first Canadian Math. Congr. Montreal 1945, 285—309, The Univ. of Toronto Press, Toronto 1946.
[3] H. HOPF, Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze. Portugaliae Math. **4**, 129—139 (1944).
[4] H. HADWIGER, Elementare Begründung ausgewählter stetigkeitsgeometrischer Sätze für Kreis und Kugelfläche. Elemente Math. **14**, 49—60 (1959).
[5] F. J. DYSON, Continuous functions defined on spheres. Ann. of Math., II. Ser. **54**, 534—536 (1951).
[6] G. R. LIVESAY, On a theorem of F. J. Dyson. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 227—229 (1954).

Eingegangen am 3. 10. 1959

Lösung einer elementargeometrischen Frage von FEJES TÒTH

Von GÜNTER SPERLING in Frankfurt am Main

Auf einer Kugel mit dem Radius 1 seien n Punkte gegeben. Jeder Punkt wird mit jedem anderen durch einen kürzesten Großkreisbogen verbunden. Für welche Punktverteilung ist die Gesamtsumme aller $\binom{n}{2}$ sphärischen Entfernungen am größten und welchen Wert hat dieses Maximum? Diese Frage wurde von FEJES TÒTH aufgeworfen und für $n \leqq 6$ beantwortet[1]). In der vorliegenden Note wird diese Aufgabe für alle geraden Zahlen n gelöst. Wie FEJES TÒTH vermutete, lautet das Ergebnis:

Die Summe aller $\binom{2k}{2}$ gegenseitigen sphärischen Entfernungen von $2k$ Punkten auf der Einheitskugel ist höchstens gleich $k^2\pi$.

Man kann zunächst leicht einsehen, daß diese obere Schranke tatsächlich erreicht wird, und zwar dann, wenn die $2k$ Punkte paarweise gegenüberliegen. Wenn man nämlich ein Paar gegenüberliegender Punkte (P_m, P'_m) derart verschiebt, daß diese Punkte gegenüberliegend bleiben, dann ändert sich die Summe der gegenseitigen Entfernungen nicht, denn für jeden Punkt P_n gilt $\widehat{P_n P_m} + \widehat{P_n P'_m} = \pi$, unabhängig von der Lage von (P_m, P'_m). Also können wir alle Punktepaare nacheinander so verschieben, daß schließlich k Punkte im Nordpol und k Punkte im Südpol liegen. Dann sieht man aber sofort, daß die Summe der Entfernungen gleich $k^2\pi$ ist.

Um nun auch zu beweisen, daß die Schranke $k^2\pi$ niemals überschritten wird, nehmen wir eine beliebige Verteilung M von $2k$ Punkten auf der Kugel an. Die Summe ihrer gegenseitigen (sphärischen) Entfernungen sei E. Dann ordnen wir jedem Punkt P_m von M einen Antipodenpunkt P'_m zu. Wir haben also $4k$ Punkte, die aber nicht alle verschieden zu sein brauchen. Die Summe der Entfernungen aller dieser $4k$ Punkte ist $4k^2\pi$, wie wir oben gesehen haben. Andererseits werden wir im folgenden zeigen können, daß diese Summe $\geqq 4E$ ist. Daraus wird sich dann sofort die Behauptung ergeben.

Jeden Punkt P_m repräsentieren wir durch seinen Ortsvektor $\mathfrak{r}_m$. Die Menge der Antipodenpunkte zu den Punkten von M bezeichnen wir mit M'. Diese Punkte haben natürlich untereinander ebenfalls die Zahl E als Summe aller Entfernungen. Die Summe der Entfernungen von allen $4k$ Punkten beträgt also $2E + R$, wobei R die Summe aller Entfernungen je zweier Punkte ist, von denen einer aus M und der

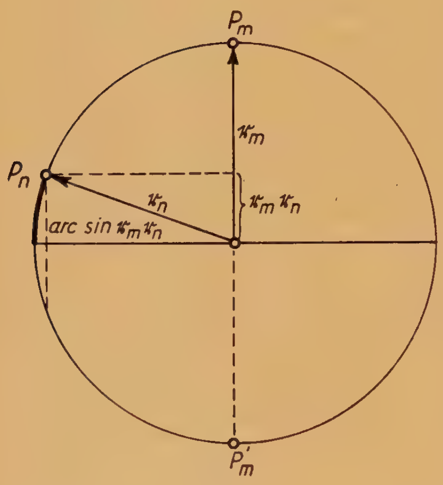
1) L. FEJES TÒTH, Über eine Punktverteilung auf der Kugel. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, Bd. X, S. 13—19 (1959). Die Kenntnis des Problems verdanke ich Herrn Prof. Dr. H. RINGEL, Bonn.

andere aus M' stammt. Wir betrachten zunächst nur denjenigen Anteil R_m von R, der vom Punkt P'_m herrührt:

$$R_m = \sum_{n=1}^{2k} (\widehat{P_n P'_m}) = \sum_{n=1}^{2k} [(\widehat{P_n P_m}) + 2 \arcsin \mathfrak{r}_m \mathfrak{r}_n] .$$

$\mathfrak{r}_m \mathfrak{r}_n$ ist das skalare Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{r}_m$ und $\mathfrak{r}_n$. Dann ist

$$R = \sum_{m=1}^{2k} R_m = \sum_{m=1}^{2k} \sum_{n=1}^{2k} (\widehat{P_m P_n}) + \sum_{m=1}^{2k} \sum_{n=1}^{2k} 2 \arcsin \mathfrak{r}_m \mathfrak{r}_n .$$



Die erste Doppelsumme ist $2E$, weil jeder Bogen zweimal erscheint; die zweite Doppelsumme — wir bezeichnen ihren Wert mit $2S$ — wird sich sogleich als nicht negativ herausstellen.

Die Entwicklung des arcsin nach seinem Argument hat die Form

$$(1) \quad \arcsin \xi = c_1 \xi + c_2 \xi^3 + c_3 \xi^5 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi^{2i-1},$$

wobei alle $c_i > 0$ sind. Diese Reihe ist konvergent für $|\xi| \leq 1$. In unserem Falle ist diese Bedingung erfüllt, da

$$|\mathfrak{r}_m \mathfrak{r}_n| \leqq |\mathfrak{r}_m| \; |\mathfrak{r}_n| = 1$$

ist, und wir können

$$\xi = \mathfrak{r}_m \mathfrak{r}_n = x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n$$

setzen, wobei x_m, y_m, z_m die Komponenten von $\mathfrak{r}_m$ und x_n, y_n, z_n die Komponenten von $\mathfrak{r}_n$ sind.

Es ist

$$\begin{aligned} \xi^{2i-1} &= (x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n)^{2i-1} = \\ &= \sum_{\substack{r+s+t=2i-1 \\ r,s,t \geqq 0}} \binom{2i-1}{r} \binom{2i-1-r}{s} (x_m x_n)^r (y_m y_n)^s (z_m z_n)^t = \\ &= \sum_{\substack{r+s+t=2i-1 \\ r,s,t \geqq 0}} \binom{2i-1}{r} \binom{2i-1-r}{s} (x_m^r y_m^s z_m^t)(x_n^r y_n^s z_n^t) . \end{aligned}$$

Dann ist

$$S = \sum_{m=1}^{2k} \sum_{n=1}^{2k} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sum_{\substack{r+s+t=2i-1 \\ r,s,t \geqq 0}} \binom{2i-1}{r} \binom{2i-1-r}{s} (x_m^r y_m^s z_m^t)(x_n^r y_n^s z_n^t) .$$

Die Reihe (1) ist absolut konvergent. Wenn wir endlich viele solcher Reihen addieren, erhalten wir natürlich wieder eine absolut konvergente Reihe, d. h. wir dürfen in der

Reihe für S beliebig umordnen:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sum_{\substack{r+s+t=2i-1 \\ r,s,t \geqq 0}} \binom{2i-1}{r} \binom{2i-1-r}{s} \sum_{m=1}^{2k} x_m^r y_m^s z_m^t \sum_{n=1}^{2k} x_n^r y_n^s z_n^t =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sum_{\substack{r+s+t=2i-1 \\ r,s,t \geqq 0}} \binom{2i-1}{r} \binom{2i-1-r}{s} \left(\sum_{m=1}^{2k} x_m^r y_m^s z_m^t \right)^2 \geqq 0 .$$

Die Summe der Entfernungen aller $4k$ Punkte ist also

$$4k^2\pi = 2E + R = 4E + S \geqq 4E.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung

$$E \leqq k^2\pi.$$

Wir bemerken noch, daß sich der obige Beweis auch auf $2k$ Punkte auf der n-dimensionalen Einheitskugel ($n = 2, 3, \ldots$) mühelos übertragen läßt.

Eingegangen am 1. 8. 1959

Sur les suites de Laplace et sur les congruences W

Par Lucien Godeaux à Liége

Dans cette note, nous considérons une forme de la condition pour qu'un réseau soit conjugué à une congruence donnée dans un espace projectif quelconque. Nous démontrons ensuite qu'une congruence W dont (x) est une surface focale, étant donnée, il existe une infinité de congruences W ayant également (x) comme surface focale et dont les complexes linéaires osculateurs sont en involution avec celui de la congruence donnée[1]).

1. On considère, dans un espace projectif S_r à r dimensions, une suite de Laplace

$$\text{(L)} \qquad \ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

dont les points dépendent de deux paramètres u, v et où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. On suppose[2])

$$U^{10} + 2b\,V = 0, \quad V^{01} + 2a\,U = 0\,, \tag{1}$$

a et b étant des fonctions de u, v dont aucune n'est identiquement nulle.

Considérons un point $J = \lambda U - \mu V$ de la droite UV et cherchons dans quelles conditions ce point décrit un réseau conjugué à la congruence (UV). Nous allons montrer que l'on peut disposer du facteur de proportionnalité de λ, μ pour avoir

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0\,, \quad \lambda^{01} + 2a\mu = 0\,. \tag{2}$$

On a

$$J^{11} - J^{10}(\log\mu)^{01} - J^{01}(\log\lambda)^{10} + J[(\log\lambda)^{10}(\log\mu)^{01} - 4ab] =$$
$$= U\left[\lambda(\log\lambda)^{11} + 2a\mu\left(\log\frac{a\mu}{\lambda}\right)^{10}\right] - V\left[\mu(\log\mu)^{11} + 2b\lambda\left(\log\frac{b\lambda}{\mu}\right)^{01}\right].$$

Pour notre objet, il faut que le second membre représente le point J, c'est-à-dire que l'on ait

$$(\log\lambda)^{11} + 2\left(\frac{a\mu}{\lambda}\right)^{10} = (\log\mu)^{11} + 2\left(\frac{b\lambda}{\mu}\right)^{01},$$

ou encore

$$\left(\frac{\lambda^{01} + 2a\mu}{\lambda}\right)^{10} = \left(\frac{\mu^{10} + 2b\lambda}{\mu}\right)^{01}. \tag{3}$$

---

[1]) Nous supposons connu notre exposé sur «La Théorie des surfaces et l'espace réglé». Actualités scient., No. 138, Paris, Hermann 1934.

[2]) Pour une raison de simplicité typographique, nous écrivons φ^{ik} au lieu de

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i\,\partial v^k}.$$

Observons que si l'on remplace λ, μ par $\lambda, \varrho\,\mu$, la relation (3) n'est pas modifiée. De la relation (3), on déduit qu'il existe une fonction $\varphi(u,v)$ telle que

$$\varphi^{01} = \frac{\lambda^{01} + 2a\mu}{\lambda}, \quad \varphi^{10} = \frac{\mu^{10} + 2b\lambda}{\mu}.$$

Posons alors $\lambda = e^{-\varphi}$. On a

$$(e^{-\varphi}\lambda)^{01} + 2a\,e^{-\varphi}\mu = 0, \quad (e^{-\varphi}\mu)^{10} + 2b\,e^{-\varphi}\lambda = 0\,.$$

En posant $\lambda_1 = e^{-\varphi}\lambda$, $\mu_1 = e^{-\varphi}\mu$, nous aurons donc

$$\mu_1{}^{10} + 2b\,\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_1{}^{01} + 2a\,\mu_1 = 0\,,$$

c'est-à-dire, en changeant de notation, les relations (2).

Pour $r = 3$, ces relations avaient été obtenues par Demoulin.

2. Le point J appartient à une suite de Laplace

$$\text{(J)} \qquad \ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots$$

inscrite dans la suite L. Précisément, le point J_n appartient à la droite $U_{n-1}U_n$ et le point J_{-n} à la droite $V_{n-1}V_n$.

L'analogie des équations (1) et (2) permet l'interprétation géométrique suivante:

Imaginons un espace projectif S_{r+1} à $r+1$ dimensions contenant l'espace S_r et soit O un point de S_{r+1} n'appartenant pas à S_r.

Sur la droite $O\,U$, prenons un point U' dont les $r+1$ premières coordonnées homogènes sont celles de U et la $(r+2)$-ième, μ. De même, sur la droite $O\,V$ prenons un point V' dont les premières coordonnées sont celles de V et la dernière λ. En vertu des relations (1) et (2), les points U', V' sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils appartiennent à une suite de Laplace

$$\text{(L}'\text{)} \qquad \ldots, U'_n, \ldots, U'_1, U', V', V'_1, \ldots, V'_n, \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite L est la projection de la suite L' à partir du point O sur S_r et la suite J s'obtient en prenant les intersections des droites $U_{n-1}U_n, U'_{n-1}U'_n$ et des droites $V_{n-1}V_n, V'_{n-1}V'_n$. Le point J est l'intersection des droites $U\,V$ et $U'\,V'$.

3. Supposons $r = 5$ et que la suite L soit attachée à une surface (x) de l'espace ordinaire S_3 rapportée à ses asymptotiques u, v.

Les coordonnées normales de Wilczynski du point x de (x) satisfont au systèmes d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20} + 2b\,x^{01} + c_1 x = 0\,,$$
$$x^{02} + 2a\,x^{10} + c_2 x = 0\,,$$

a, b, c_1, c_2 étant des fonctions de u, v.

Sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 les points U, V représentent les tangentes au point x aux asymptotiques u, v de la surface (x).

Le point J représente une droite j, tangente en x à la surface (x), engendrant une cóngruence W dont nos désignerons par $(\bar{x})$ la seconde surface focale.

Soient $\bar{U}, \bar{V}$ les points de Q qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v au point $\bar{x}$ de la surface $(\bar{x})$. Nous avons montré que les droites $U\bar{U}$ et $V\bar{V}$ se coupent en un point P seconde image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j[3]. La première image de ce complexe est l'hyperplan $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$.

Nous avons

$$U_1 = U^{01} - U(\log b)^{01}, \qquad V_1 = V^{10} - V(\log a)^{10},$$
$$U_2 = U_1^{01} - U_1(\log b\, h_1)^{01}, \quad V_2 = V_1^{10} - V_1(\log a\, k_1)^{10},$$

où

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab, \quad k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

Ensuite, nous avons

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U, \qquad J_{-1} = \lambda V_1 - \lambda_1 V,$$
$$J_2 = \mu_1 U_2 - \mu_2 U_1, \quad J_{-2} = \lambda_1 V_2 - \lambda_2 V_1,$$

où

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu(\log b)^{01}, \qquad \lambda_1 = \lambda^{10} - \lambda(\log a)^{10},$$
$$\mu_2 = \mu_1^{01} - \mu_1(\log b\, h_1)^{01}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{10} - \lambda_1(\log a\, k_1)^{10}.$$

Nous avons montré[4] que le point P est donné par

$$P = [\mu_2 + \mu_1(\log b\, h_1)^{01} + \beta\mu]\, U - [\mu_1 - \mu(\log b\, h_1)^{01}]\, U_1 + \mu U_2 -$$
$$- [\lambda_2 + \lambda_1(\log a\, k_1)^{10} + \alpha\lambda]\, V + [\lambda_1 - \lambda(\log a\, k_1)^{10}]\, V_1 - \lambda V_2,$$

où

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$
$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

Le point P est par définition le pôle de l'hyperplan $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$.

4. Proposons-nous de rechercher s'il peut exister sur la droite UV un point I décrivant un réseau conjugué à la congruence (UV) et tel que le plan osculateur à la surface (I) passe par P.

Nous posons

$$I = lU - mV$$

et nous pouvons supposer

$$l^{01} + 2am = 0, \quad m^{10} + 2bl = 0. \tag{4}$$

Nous désignerons par I_1, I_2 les deux premiers transformés de Laplace de I dans le sens des v, par I_{-1}, I_{-2} les transformés dans le sens des u.

---

[3]) «Sulle congruenze W». Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, série V, vol. XV, 1956.

[4]) «Sulle congruenze W», loc. cit.

En posant

$$m_1 = m^{01} - m\,(\log b)^{01}, \qquad l_1 = l^{10} - l\,(\log a)^{10}, \tag{5}$$
$$m_2 = m_1^{01} - m_1\,(\log b\,h_1)^{01}, \quad l_2 = l_1^{10} - l_1\,(\log a\,k_1)^{10},$$

nous avons

$$I_1 = m\,U_1 - m_1\,U, \quad I_{-1} = l\,V_1 - l_1\,V,$$
$$I_2 = m_1\,U_2 - m_2\,U, \quad I_{-2} = l_1\,V_2 - l_2\,V_1.$$

Pour notre objet, l'hyperplan $I_2\,I_1\,I I_{-1}\,I_{-2}$ doit passer par le point P.

Tout point de l'espace S_5 peut être représenté par

$$\eta_2\,U_2 + \eta_1\,U_1 + \eta_0\,U + \xi_0\,V + \xi_1\,V_1 + \xi_2\,V_2$$

et les η, ξ sont les coordonnées locales de ce point.

L'hyperplan $I_2\,I_1\,I I_{-1}\,I_{-2}$ a pour équation locale

$$m_2\,\eta_2 + m_1\,\eta_1 + m\,\eta_0 + l\,\xi_0 + l_1\,\xi_1 + l_2\,\xi_2 = 0\,.$$

Pour qu'il passe par le point P, on doit avoir

$$m_2\,\mu - m_1\,[\mu_1 - \mu\,(\log b\,h_1)^{01}] + m\,[\mu_2 + \mu_1\,(\log b\,h_1)^{01} + \beta\,\mu] -$$
$$- l_2\,\lambda + l_1\,[\lambda_1 - \lambda\,(\log a\,k_1)^{10}] - l\,[\lambda_2 + \lambda_1\,(\log a\,k_1)^{10} + \alpha\,\lambda] = 0\,,$$

équation symétrique en l, m et λ, μ.

En utilisant les relations (5), cette équation se ramène à

$$A_0\,m^{02} + A_1\,m^{01} + A_2\,m + B_0\,l^{20} + B_1\,l^{10} + B_2\,l = 0\,. \tag{6}$$

5. En dérivant trois fois de suite par rapport à v l'équation (6) et en utilisant les relations (4), on obtient trois équations où figurent l^{20}, l^{10}, l. En éliminant ces quantités entre ces équations et (6), on obtient une équation de la forme

$$A_0'\,m^{05} + A_1'\,m^{04} + A_2'\,m^{03} + A_3'\,m^{02} + A_4'\,m^{01} + A_5'\,m = 0\,. \tag{7}$$

Soit

$$\chi_1\,(u, v),\ \chi_2\,(u, v), \ldots, \chi_5\,(u, v)$$

un système fondamental d'intégrales de l'équation (7), où l'on suppose u constant. L'intégrale générale de cette équation peut s'écrire

$$m = \varphi_1\,(u)\,\chi_1\,(u, v) + \varphi_2\,(u)\,\chi_2\,(u, v) + \cdots + \varphi_5\,(u)\,\chi_5\,(u, v)\,,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$ sont des fonctions arbitraires de u.

De la seconde des relations (4), on tire

$$2\,b\,l + \sum \varphi'\,\chi + \sum \varphi\,\chi^{10} = 0\,.$$

La première des équations (4) donne ensuite

$$\sum \varphi'\,[\chi\,(\log b)^{01} - \chi^{01}] + \sum \varphi\,[4\,a\,b\,\chi + \chi^{10}\,(\log b)^{01} - \chi^{11}] = 0\,.$$

Nous pouvons choisir arbitrairement quatre des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$, la cinquième étant déterminée par l'équation précédente. Chaque solution donnera un point I de la droite $U\,V$ décrivant un réseau conjugué à la congruence $(U\,V)$.

6. Chacune des surfaces (I) trouvées représente une congruence W ayant (x) comme surface focale. Le complexe linéaire osculateur à cette congruence le long de la droite i a pour première image l'hyperplan $I_2 I_1 I I_{-1} I_{-2}$, qui passe par P. Sa seconde image, pôle de cet hyperplan par rapport à Q, appartient à la première image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j). Les deux complexes linéaires sont donc en involution.

Etant donnée une congruence W dont (x) est une surface focale, il existe une infinité de congruences W ayant la même surface focale et dont les complexes linéaires osculateurs sont en involution avec le complexe linéaire osculateur à la congruence donnée.

Eingegangen am 9. 10. 1959